Topologie

Alexandra Olivová

November 2018

1 Topologický prostor

Definice 1.1. *Nechť* $x \neq 0$ *je množina (neprázdná) a* τ *je systém jejich podmnožin, ve kterém jsou splněny axiomy:*

1. $\emptyset \in \tau$, $x \in \tau$,
2. $A, B \in \tau \to A \cap B \in \tau$,
3. *Sjednocení libovolného podsystému množin patří do* τ.

Potom se τ nazývá topologii na X a (X, τ) se nazývá topologický prostor.

Množiny z τ se nazývají otevřené množiny. Množina se nazývá uzavřená, když je její doplněk otevřená množina.

Definice 1.2. *A je uzavřená množina když* $X \setminus A$ *je otevřená množina.* V každé topologii je prázdná množina a celá množina X uzavřená i otevřená.

Věta 1.3. (o uzavřených množinách)

1. $\emptyset, X \in \tau$ *(uzavřená),*
2. $A, B \in \tau$*(uzavřená)* $\to A \cap B \in \tau$ *(uzavřená),*
3. $A_i \in \tau$*(uzavřená),* $i \in I \to \cup A_i \in \tau$*(uzavřená).*

Důkaz.

Definice 1.4. *Nechť je* (X, τ) *topologický prostor. Množinu B (množina otevřených podmnožin X) nazveme bází topologie* τ*, když každá otevřená množina v* τ *je sjednocením množin z B.*

Axiomy báze
(P) $\cup B = X$ (sjednocení množin z báze pokryjí celé X),

(B) Pro každé $B_1, B_2 \in B, B_1 \cap B_2$ je sjednocení množin z báze.

Věta 1.5. $B \subset 2^x$ *je bází nejaké topologie právě tehdy, když platí (P) a (B).*
Důkaz.
Příklad.

Věta 1.6. Topologický prostor (X,τ) množina B otevřených podmnožin z X je báze topologie právě tehdy, když pro každé x $\in U, U je otevenmnoina, existuje$B $\in B$, $x \in B \subset U$.
Důkaz.

Definice 1.7. *X je množina, P je předbáze, $P \subset 2^x$. Existuje taková topologie τ, že $P \subset \tau$, že ta topologie je diskrétní. P je předbáze takové topologie.*

Věta 1.8. Když je P pokrytí X, pak B je báze nejhrubší topologie na X, která obsahuje P.
Důkaz.

Věta 1.9. Nechť na prostoru X máme 2 báze - B_1, B_2 a nechť tyto báze na X určují topologii $\tau_1 a \tau_2$. Potom pro každé $b_1 \in B_1$ a pro každé $a \in B_1$ existuje $b_2 \in B_2$ takové, že $a \in b_2 \subset b_1$ pak $\tau_1 \subset \tau_2$.
Důkaz.
Definice 1.10.*Máme prostor X, $A \subset X, x \in A$ a topologie. A nazýváme okolím bodu x právě tehdy, když existuje $B \subset \tau$ tak, že $x \in B \subset A$.*

Poznámka: Okolí bodu nemusí být pouze otevřená množina. B stačí hledat mezi bázovými množinami.

Věta 1.11. Nechť A je podmnožinou X, Jestliže pro každé x z A, existuje okolí takové, že to okolí je podmnožinou A, pak A je otevřená množina. *Důkaz.*

Věta 1.12. Papír.

2 Vnitřek a uzávěr množiny

Definice 2.1. Vnitřek a uzávěr množiny

Věta 2.2.

1. Vnitřek množiny A je největší otevřená množina ležící v A.
2. Uzávěr množiny A je nejmenší uzavřená množina obsahující A.

Věta 2.3.

1. Množina A je otevřená právě tehdy, když int A = A.
2. Množina A je uzavřená právě tehdy, když uzávěr A = A.

Věta 2.4. *Důkaz.*

Věta 2.5. *Důkaz.*

Definice 2.6

Definice 2.7. Bod x se nazývá vnitřní (uzávěrový, hraniční) bod množiny A, jestliže x $\in intA$.

Věta 2.8 *Důkaz.*

Husta množina - papír!

3 Topologické podprostory

Definice 3.1

Věta 3.2 τ zúžené na Y je topologie. *Důkaz.*

Definice 3.3. Topologie τ zúžená na Y se nazývá indukovaná (relativní) topologie na Y. Příklad.
Věta 3.4.

Věta 3.5.

1. Otevřená podmnožina otevřeného (pod)prostoru je otevřená i v nadprostoru.

2. Uzavřená podmnožina uzavřeného (pod)prostoru je uzavřená i v nadprostoru.

Věta 3.6 Stopa husté množiny v otevřeném podprostoru je hustá v podprostoru. *Důkaz.*

4 Spojité zobrezení

Definice 4.1

Věta 4.2.

1. Když existuje taková báze okolí bodu x a existuje báze okolí bodu f(x) takové, že pro každé C z okolí bodu f(x), existuje B z okolí bodu x tak, že $f(B) < C$.

2. Když je f spojité v bodě x, pak pro každé U z topologie na Y a existuje V z topologie na X, f(V) $\subset U$.

Věta 4.3. Zobrazení $f : X \to Y$, pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. f je spojité zobrazení.

2. Pro každé $A \subset X$ platí, že $f(uzvrA) \subset$ uzávěr $f(A)$.

3. Vzor každé uzavřené množiny je uzavřená množina.

4. Vzor každé otevřené množiny je otevřená množina.

5. Existuje předbáze P na Y taková, že vzor každého jejího prvku je otevřená v X.

Důkaz.

Tvrzení 4.4. Stopa spojitého zobrazení je spojité zobrazení. *Důkaz.*

Věta 4.5. X,Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$. Nechť U je pokrytí prostoru X a f zúžené na U je spojité, pro každé U z topologie na Y. Potom f je spojité, když U je otevřené pokrytí nebo U je konečné uzavřené pokrytí. *Důkaz.*

Speciální případ spojitých zobrazení - spojitá funkce - $f : X \to \mathbf{R}$.
C(X,Y) - množina spojitých zobrazení z X do Y.
C(X) - spojité funkce z X

Věta 4.6. Nechť f,g $\in C(X)$, $c \in \mathbf{R}$. Potom platí, že f+g, f-g, c*f, f*g, absolutní hodnota f, maximum a minimum z funkcí, podíl f a g, jsou spojité.

5 Homeomorfismus

Definice 5.1. Zobrazení $f : X \to Y$ je homeomorfismus právě tehdy, když zobrezení f je spojité a bijektivní a inverzní zobrezení od $f : Y \to X$ je spojité.

Definice 5.2. Zobrezení $f : Y \to X$ je vložení, když jeho stopa na Y je homeomorfismus. (f je vložení, když platí, že f je injektivní a spojité a pro každé otevřené A z Y, existuje A' z X otevřené, tak že f(A) = průnik A' s f(Y)

Každý homeomorfismus je vložení.

6 Hausdorfovský prostor

Definice 6.1. Prostor X se nazývá Hausdorfovský, když pro každé $x, y \in X$, kdy x se nerovná y, existuje okolí x a okolí y, takové, že jejich průnik je prázdná množina.

Věta 6.2. Prostory X,Y a Y je Hausdorfův. Zobrazení $f, g : X \to Y$ jsou spojité. Potom množina, taková že $x \in X$ tak, že $f(x) = g(x)$ je uzavřená.
Důkaz.

Důsledek 6.3. Zobrazení $f, g : X \to Y$ jsou spojité. Y je Hausdorfův prostor. H $\subset Xjehustmnoina.PakkdyzmfagnaH, paksezuenzobrezenrovnaj, rovnajseinezenzobrazen.$
Důkaz.

Důsledek 6.4. Zobrazení $f, g : X \to Y$ jsou spojité. Y je Hausdorfův prostor. Když $y_0 \in Y$, potom obraz y_0 je uzavřená podmnožina X.
Důkaz.

7 Součin topologických prostorů

(X,τ) a (Y,τ'), B je báze X a B' je báze Y. Součin bází je baze součinu topologických prostorů.

1. Tuto strukturu můžeme rozšířit na konečný počet prostorů.
2. Pokud tuto strukturu rozšíříme na nekonečný počet prostorů, dostaneme tzv. bot topology πO_i - otevřená v X_i
3. Bot množina je otevřená v Bot topology. Je příliš velká nepoužívá se.
4. Příklad.
5. ...

Definice 7.1. Součinová topologie na součinu topologických prostorů. $\Pi(X_i, i \in I)$ je topologie s předbází P - obrazy A_i, kde A_i jsou otevřené množiny, všechny p_i jsou spojité zobrezení.

Věta 7.2. Součinová topologie je nejhrubší taková, že každé p_i jsou spojité.

Věta 7.3. Zobrazení f: X $\rightarrow \Pi(X_i)$ je spojité právě tehdy, když p_j po f je spojité pro každé $j \in I$.
Důkaz.

Věta 7.4.

1. Součin spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
2. Součin homeomorfismů je homeomorfismus.
3. Součin vložení je vložení.

Důkaz.

Separabilní prostor je takový, který obsahuje hustou množinu, která je spočitatelná - racionální, reálná čísla.

Věta 7.5. Součin spočetné soustavy separabilních prostorů je separabilní prostor.
Důkaz.

8 Faktorová topologie

1. Relace ekvivalence - reflexivita, symetrie a tranzitivita.
2. X/**R** - faktorová množina, jejíž prvky jsou třídy ekvivalence rozkladu podle R
3. Surjektivní zobrazení - každá třída ekvivalence má vzor (nemusí to být topologie).

Definice 8.1. Faktorová topologie na prostoru X/R je definována nasledovně: Množina A je otevřená v X/R právě tehdy, když vzor A (přes projekci) je otevřená v X.

Věta 8.2. Faktorová topologie je nejhrubší topologie na X/R, pro kterou je projekce PR spojitá.
Důkaz.

Věta 8.3. Zobrazení f je spojité právě tehdy, když je f po PR spojité.
Důkaz.

Věta 8.4. Každý metrický prostor je Hausdorfův.
Důkaz. Jednoduchý.

Posloupnost - definice limity?
Věta Když je x = lim x_n, kdyz $x_n \in A$, pak x je z uzávěru A.
Důkaz.

Ordinální čísla - velikosti nekonečen
Věta x = lim x_n a $f : X \to Y$, $x \in X$ a f je spojité v bodě x, pak f(x) = lim (f(x_n)) - opačná imlikace platí v metrickém prostoru.

Věta V každém Hausdorfovském prostoru má každá posploupnost nejvíce 1 limitu - bez předpokladu věta neplatí.

9 Metrické prostory

Definice 9.1. Posloupnost (x_n) konverguje k x $\in X, kdyprokad\epsilon > 0$, existuje n_0 takové, že každé n (větší rovno) n_0 pak d(x,x_i) $< \epsilon$, $x_n \to x$.

Věta 9.2. (X,d) je metrický prostor. $A \subset X$ je uzavřená právě tehdy, když každá konvergentní posloupnost v A konverguje k $x \in A$.
Důkaz.

Věta 9.3. (X,d_1) a (Y,d_2) jsou metrické prostory a f: (X,τ_1) $\to$ $(Y$,$\tau_2)$ je spojité právě tehdy, když $x_n \to xpakf(\mathrm{x}_n) \to f(x)$.
Důkaz.

Důsledek 9.4. (X,d_1) a (Y,d_2) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$ je spojité právě tehdy, když pro každé x_0 a ϵ ¿ 0, existuje δ 0 takové, že d_1(x,x_0) ¡ δ, pak d_2(f(x),f(x_0)) ¡ ϵ.
Cauchyovská posloupnost.

10 Úplné metrické prostory

Definice 10.1. *Posloupnost* $\{x_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ *metrického prostoru (X,d) se nazývá Cauchyovská, jestliže pro každé* $\epsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \boldsymbol{N}$*, a pro každé i* n_0 *d(*x_i, x_j*)* $<\epsilon$.

Věta 10.2. Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. *Důkaz.*

Příklad

Definice 10.3. *Metrický prostor se nazývá úplný právě tehdy, když každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.*

Věta 10.4.

1. Úplný podprostor metrického prostoru je uzavřená množina.

2. Úplný podprostor metrického prostoru je uzavřená množina.

Důkaz.

Důsledek 10.5. Podprostor A úplného metrického prostoru je úplný právě tehdy, když A je uzavřená množina.

11 Rovnoměrně spojité zobrazení

Definice 11.1. *Zobrazení* $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *je rovnoměrně spojité právě tehdy, když pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$*: pro každé* $x, y \in X$ *platí, že* $d_1(x, y) < \delta \to d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Poznámka - je-li f rovnoměrně spojité, pak je spojité (opačně neplatí) - implikace se může obrátit pouze v kompaktním prostoru

Věta 11.2. (X, d), $f : X \to \mathbf{R}$; $x \in X$, A je podmnožinou X, $x \to d(x, A) \in \mathbf{R}$, $d(x, A) = inf\{d(x, a)\}, a \in A$, pak je f rovnoměrně spojité zobrazení.
Důkaz.

Věta 11.3. Zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ jsou 2 rovnoměrně spojité zobrazení. $(X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3)$ jsou metrické prostory. Pak $g \circ f : X \to Z$ je také stejnoměrně spojité zobrazení.
Důkaz.

Věta 11.4. Jestliže $f : X \to Y$ je rovnoměrně spojité, a $\{x_n\}$ je Cauchyovská posloupnost v X, pak $\{F(x_n)\}$ je Cauchyovská posloupnost v Y.
Důkaz.

Důsledek 11.5. Zobrazení $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ je rovnoměrně spojité. $\{x_n\}$ je posloupnost v X, která konverguje $x_n \to x$. Potom $\{f(x_n)\}$ je posloupnost v Y, f(x_n) →f(x) $\in Y$.
Důkaz.

Důsledek 11.6. Nechť existuje bijekce $X \to Y$ tak, že f i f^{-1} jsou rovnoměrně spojité, pak metrický prostor X je úplný právě tehdy, když Y je úplný.
Důkaz.

12 Kontrakce

Definice 12.1. *Nechť* $(X, d_1), (Y, d_2)$ *jsou 2 metrické prostory. Zobrazení* $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *se nazývá kontrakce právě tehdy, když existuje k:* $k \in (0; 1)$ *tak, že pro každé* $x, y \in X$ *platí* $d_2(f(x), f(y)) < k * d_1(x, y)$.

Věta 12.2. Kontrakce je rovnoměrně spojité zobrazení.
Důkaz.
Věta 12.3. Nechť (X, d_1) je úplný metrický prostor, $f : X \to X$ je kontrakce. Potom existuje právě 1 $x \in X$ tak, že $f(x) = x$.
Důkaz.

13 Zúplnění metrického prostoru

Definice 13.1. $(X, d_1)(Y, d_2), f : X \to Y$ *se nazývá izometrie právě tehdy, když* $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$ *pro každé* $x, y \in X$. X, Y *se nazývají izometrické, jestliže existuje izometrie* $f : X \to Y$.

Izometrie je rovnoměrně spojité zobrazení, které je injektivní z vlastností metriky. Jestliže je f surjektivní zobrazení, pak i f^{-1} je izometrie. Potom každá surjektivní izometrie je homeomorfismus.

Izometrie f: X $\to Y, kdeY jeplnmetrickprostortak, ef(x)jevY hust, senazvzplnnmetrickhoprostoruX.$

Věta 13.2. (Hausdorffova zúplnění metrického prostoru) Každý metrický prostor je izometrický s podprostorem úplného metrického prostoru.
Důkaz.
Důsledek 13.3. Ke každému metrickému prostoru existuje jeho zúplnění.
Důkaz.

Důsledek 13.4. Každá Cauchyovská posloupnost je ohraničená
Důkaz.

14 Vlastnosti souvísející se spočetností

1. X je separabilní právě tehdy, když existuje spočetná hustá podmnožina
2. X splňuje 1.axiom spočetnosti právě tehdy, když každý bod má spočetnou bázi okolí (např. každý metrický prostor)
3. X splňuje 2.axiom spočetnosti právě tehdy, když X má spočetnou bázi
4. X je Lindelöfovský právě tehdy, když každé otevřené pokrytí má spočetné podpokrytí.

Věta 14.1. 2. axiom spočetnosti platí právě tehdy, když je separabilní.

Lemma 14.2. Jestliže existuje báze B tak, že každé pokrytí prostoru prvky báze B má spočetné podpokrytí, pak je prostor lindelöfovský.

Důkaz.

Věta 14.3. (Lindelöfova) Platí-li 2.axiom spočetnosti, pak je lindelöfovský.
Důkaz.

Věta 14.4. X je metrický prostor, 2.axiom o spočetnosti právě tehdy, když je separabilní a lindelöfovský. (Předpoklad se dá zeslabit na metrizovatelný prostor.)

15 Kompaktní prostory

Definice 15.1. *Topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.*

Množina A je kompaktní, jestliže je kompaktní jako podprostor topologického prostoru.

Věta 15.2 Topologický podprostor Y podmnožinou X je kompaktní právě tehdy, když každé jeho pokrytí množinami otevřenými v X, obsahuje konečné podpokrytí.
Důkaz.

Věta 15.3

1. Sjednocení 2 kompaktních množin je kompaktní množinou.
2. Jestliže A je kompaktní a U je otevřená, tak A-U je kompaktní.

Důkaz.

Důsledek 15.4. Uzavřená podmnožina kompaktního topologického prostoru je kompaktní.
Důkaz.

Věta 15.5. Zobrazení $f : X \to Y$ je spojité, A je podmnožinou X, jesliže je A kompaktní, tak i f(A) je kompaktní.
Důkaz.

Důsledek 15.6. Faktorový prostor kompaktního topologického prostoru je kompaktní.

Důsledek 15.7. Kompaktní prostor není homeomorfní s nekompaktním topologickým prostorem.

Věta 15.8. A je kompaktní, pak každá nekonečná posloupnost A, má limitní bod (každé okolí bodu má s A neprázdný průnik).
Důkaz.

Definice 15.9. (X, τ), *X se nazývá sekvenciálně kompaktní, jestliže každá posloupnost v X má konvergentní podposloupnost. Pak se X nazývá limit-point kompaktní, jestliže každá nekonečná podmnožina má limitní bod.*

Věta 15.10. X je metrizovatelný prostor, tak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. X je kompaktní
2. X je limit-point kompaktní
3. X je sekvenciálně kompaktní

Důkaz.

16 Kompaktní Hausdorffovy prostory

Věta 16.1.

1. Kompaktní množina v Hausdorffově prostoru je uzavřená.
2. Průnik libovolného systému kompaktních množin v Hausdorffově prostoru je kompaktní množinou.

Důkaz.

Věta 16.2. Zobrazení $f : X \to Y$ spojitá bijekce, X je kompaktní, Y je Hausdorffův. Pak f je homeomorfismus.
Důkaz.

Věta 16.3. (Hein - Borelova) A je podmnožinou R^n a je kompaktní právě tehdy, když A je uzavřená a ohraničená.
Důkaz.

Věta 16.4. (Tichonovova věta) Kartezský součin kompaktních prostorů je kompaktní prostor.
Důkaz.