Stochastické procesy

Alexandra Olivová

December 2021

1 Náhodné procházky a jejich aplikace

- Náhodný proces: Buď dán pravděpodobnostní prostor (Ω, A, P) a množina $T \subset \mathbf{R}$. Náhodným procesem pak nazýváme množinu $\{X_t, t \in T\}$, kde X_t jsou náhodné veličiny z (Ω, A, P).
- Náhodná veličina: Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor. Náhodnou veličinou pak nazýváme zobrazení $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.
- Ω - množina elementarních jevů, F - σ-algebra, P - pravděpodobnost.

Jednoduchá náhodná procházka - jeden z nejjednodušších případu stochastického procesu.

Hráč G hraje následující hru v kasinu: Po každé, když padne hlava, dostane G jednu minci. Pokud padne orel, jednu minci ztratí. S_n je jmění, které má G po n hodech. Můžeme tedy napsat $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, kde X_{n+1} je náhodná proměnná, která má hodnotu 1 s pravděpodobností p nebo hodnotu -1 s pravděpodobností $1 - p$. X_{n+1} je nezávislá na předcházejících hodech.

$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Symetrická náhodná procházka: $p = q = \frac{1}{2}$,
- spatially homogeneous: $P(S_n = j|S_0 = a) = P(S_n = j + b|S_0 = a + b)$,
- temporally homogeneous: $P(S_n = j|S_0 = a) = P(S_{m+n} = j|S_m = a)$,
- Markovova vlastnost: $P(S_{m+n} = j|S_0, S_1, ..., S_m) = P(S_{m+n} = j|S_m)$

OBRÁZKY

Counting sample paths: Nechť $X_1, X_2, ...$ jsou nezávislé proměnné, kde každá nabývá hodnoty 1 nebo -1 s pravděbodoností p nebo $1 - q$ a nechť $S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i$ je pozice odpovídající po n krocích s počátkem v $S_0 = a$. Množina realizací náhodné procházky je množina vektorů $s = (s_0, s_1, ...)$, kde $s_0 = a$ a $s_{i+1} - s_i = \pm 1$. Pravděpodobnost, že prvních n kroků náhodné procházky následuje danou cestu $s = (s_0, s_1, ..., s_n)$ je $p^r q^l$, kde r je počet kroků doprava a l je počet kroků doleva.

Příklad: $\mathbf{P}(S_n = b) = \sum_r M_n^r(a,b)p^r q^{n-r}$, kde $M_n^r(a,b)$ je číslo cest $s = (s_0, s_1, ..., s_n)$ s $s_0 = a$, $s_n = b$ a s přesně r kroky doprava. Je jednoduché vidět, že $r + l = n$, a $r - l = b - a$ celkový posun doprava, tedy $r = \frac{1}{2}(n + b - a)$ a $l = \frac{1}{2}(n - b + a)$. Tedy

$$\mathbf{P}(S_n = b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)} p^{\frac{1}{2}(n+b-a)} q^{\frac{1}{2}(n-b+a)},$$

kde kombinační číslo znamená počet cest s délkou n, r pravými kroky a $n - r$ levými kroky.

Předpokládejme, že víme, že $S_0 = a$ a $S_n = b$. Náhodná procházka může nebo nemusí navštívit počátek mezi 0 a n. Nechť $N_n(a,b)$ je číslo možných cest z $(0,a)$ do (n,b), a nechť $N_n^0(a,b)$ je číslo takových cest, které zahrnují nějaký bod $(k,0)$.

Věta. Princip reflexe: Pokud $a, b > 0$, potom $N_n^0(a,b) = N_n(-a,b)$.

Markovův řetězec: Proces X je Markovův řetězec, pokud splňuje Markovovu vlastnost: $P(X_n = s|X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = s|X_{n-1} = x_{n-1})$.

Řetězec X je homogenní, pokud $\mathbf{P}(X_{n+1} = j|X_n = i) = \mathbf{P}(X_1 = j|X_0 = i)$, pro všechna n, i, j. Přechodová matice $P = p_{ij}$, $|S| \times |S|$ s přechodovou pravděpodobností $p_{ij} = \mathbf{P}(X_{n+1} = j|X_n = i)$.

Věta: Přechodová matice P je stochastickou maticí, pro kterou platí:

- P má nezáporné hodnoty; $p_{ij} \leq 0$,
- P má řádkovou sumu rovnu 1; $\sum_j p_{ij} = 1$.

Wienerův proces (370): limita náhodné procházky (spojitá náhodná procházka).

- časová homogenita S_m a $S_{m+n} - S_n$ má stejnou distribuci,
- nezávislost $S_{n_i} - S_{m_i}$.
- Brownův pohyb

2 Martingaly a jejich aplikace

Definice: Posloupnost $\{S_n : n \geq 1\}$ je **martingal** s ohledem na posloupnost $\{X_n : n \geq 1\}$, pokud pro všechna $n \geq 1$, platí:

1. $\mathbf{E}|S_n| < \infty$,
2. $\mathbf{E}(S_{n+1}|X_1, ..., X_n) = S_n$.

Příklad: Předpokládejme, že gambler vyhraje poprvé v N-té hře. N je náhodná proměnná s funkcí $\mathbf{P}(N = n) = (\frac{1}{2})^n$ a takz $\mathbf{P}(N < \infty) = 1$; gamblerovi je téměř jistě garantována výhra v dlouhé hře. Nicméně, během hry ztratí L peněz se střední hodnotou $\mathbf{E}(L) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n(1 + 2 + ... + 2^{n-2}) = \infty$.

V duchu diverzifikace, předpokládejme, že gambler sazí opakovaně s počátečním kapitálem S_0 a nechť S_n je kapitál po n hrách. Měli bychom přemýšlet o $S_0, S_1, ...$ jako o sekvencích závislých náhodných proměnných. Před $(n + 1)$ sázkou gambler zná numerickou hodnotu $S_0, S_1, ..., S_n$, ale může pouze hádat budoucí hodnoty $S_{n+1}, ...$. Pokud je hra férová podmínka na minulých informacích, nebude očekávat změnu v jeho kapitalu v průměru: $\mathbf{E}(S_{n+1}|S_0, S_1, ..., S_n) = S_n$.

Většina kasín musí platit alespoň režijní náklady a hledá, jak změnit tuto rovnici na $\mathbf{E}(S_{n+1}|S_0, S_1, ..., S_n) \leq S_n$. Gambler musí mít opravdu štěstí, aby nerovnost zvrátil.

Příklad: Nechť $X_1, X_2, ...$ jsou nezávislé proměnné s nulovou střední hodnotou. Tvrdíme, že posloupnost částečných součtů $S_n = X_1 + ... + X_n$ je martingal vzhledem k $\{X_n\}$. Tedy: $\mathbf{E}(S_{n+1}|X_1, ..., X_n) = \mathbf{E}(S_n + X_{n+1}|X_1, ..., X_n) = \mathbf{E}(S_n|X_1, ..., X_n) + \mathbf{E}(X_{n+1}|X_1, ..., X_n) = S_n + 0 = S_n$.

Definice: F_n je filtrací, pokud $F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F$, kde každé F_i je σ-algebra.

Definice: σ-algebra - celá množina, doplňky a spočetné sjednocení.