Metody řešení ODR

Alexandra Olivová

March 8, 2022

1 Elementární metody řešení ODR

1.1 Exaktní ODR 1.řádu, separace proměnných a integrační faktory.

Odkaz (zdroj - doc. Sergyeyev):
Totální diferenciální rovnice zahrnuje 2 nebo více závisle proměnné s jejich ddiferenciály nebo diferenciálními koeficienty s ohledem na 1 nezávisle proměnnou, která může nebo nemusí vystupovat explicitně v rovnici.

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyššího derivace.

Stupeň diferenciální rovnice je nejvyšší mocninou proměnné.

Exaktní rovnice.

Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu a prvního stupně může být vyjádřena ve tvaru totalní diferenciální rovnice

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

kde P a Q jsou funkce proměnných x a y (nezahrnuje p). Když je diferenciál je $Pdx + Qdy$ nevynásoben nějakým faktorem, vyjadřitelným ve tvaru du, kde u je funkce proměnných x a y, pak je rovnice *exaktní*.

Rovnice

$$Pdx + Qdy = 0$$

je *exaktní* a její primitivní funkce je

$$u = c,$$

potom následující vyjádření $Pdx + Qdy$ a $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ musí být ekvivaletní (pro du), to znamená

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Potom

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

dokazuje, že ekvivalentní vyjádření $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ je spojité.

Podmínka $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ je nezbytná. Zbývá ukázat, že je podmínka dostatečná. To znamená, že pokud je podmínka splněna, pak je rovnice exaktní a její primitivní funkce můžeme nalézt pomocí kvadratury (vyjádření řešení rovnice pomocí integrálu).

Nechť $u(x, y)$ je definovaná jako

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \varphi(y),$$

kde x_0 je libovolná konstanta a $\varphi(y)$ je libovolná funkce pouze proměnné y. Potom $u = c$ je primitivní funkce $Pdx + Qdy = 0$, pokud

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q.$$

První podmínka je splněna, druhá určuje $\varphi(y)$, tedy:

$$Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y),$$

a proto

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy,$$

kde y_0 je libovolné. Podmínka je tedy dostatečná, rovnice je exaktní a její primitivní funkce je

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = c.$$

Separace proměnných.

Konkrétním případem exaktních rovnic je když P je funkcí pouze proměnné x a Q funkcí pouze proměnné y. V tomto případě je rovnice následující

$$X(x)dx + Y(y)dy = O,$$

a je to *rovnice se separovanými proměnými*. Její primitivní dunkcí je

$$\int X dx + \int Y dy = c.$$

Další možný tvar rovnice pro *separaci proměnných*: $XY_1 dy + x_1 Y dy = 0$, může být přepsána do tvaru $\frac{X}{X_1} dy + \frac{Y}{Y_1} dy = 0$.

Příklad.
Homogenní rovnice.

Pokud P a Q jsou *homogenní funkce* proměnných x a y, stejného stupně n, rovnice je redukovatelná substitucí $y = vx$ na rovnici se separovatelnými proměnnými. Platí

$$P(x,y) = x^n P(1,v), P(x,y) = x^n Q(1,v),$$

a proto

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Dále substituce

$$\{P(1,v) + vQ(1,v)\}dx + xQ(1,v)dv = 0$$

nebo

$$\frac{dv}{\varphi(v)} + \frac{dx}{x} = 0,$$

kde

$$\varphi(v) = v + \frac{P(1,v)}{Q(1,v)}.$$

Řešením je

$$\int \frac{dv}{\varphi(v)} = \log \frac{c}{x}.$$

Příklad.

Když je rovnice $Pdx + Qdy = 0$ homogenní a exaktní, tak je integrovatelné bez úvodu o kvadratuře. Dokažme, že to neplatí pro $n = 1$.

Rovnice typu

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{Ax + By + C}{ax + bx + c}\right),$$

kde A, B, C, a, b, c jsou konstanty, takové že $Ab - aB \neq 0$, můžou být transformovány do homogenní formy lineární transformací proměnných $x = h + \xi$ a $y = k + \eta$, kde ξ, η jsou nové proměnné a h, k jsou konstanty, takové, že platí $Ah + Bk + C = 0$ a $ah + bk + c = 0$. Rovnice má pak tvar

$$\frac{d\eta}{d\xi} = F\left(\frac{A\xi + B\eta}{a\xi + b\eta}\right),$$

kde F je homogenní funkce proměnných ξ, η stupně 0. Konstanty h, k jsou určeny $Ab - aB \neq O$.
Když $Ab - aB = O$, potom η je novou zavisle proměnnou definouvanou

$$\eta = x + \frac{By}{A} = x + \frac{by}{a},$$

potom

$$\frac{d\eta}{dx} = 1 + \frac{b}{a} F\left(\frac{A\eta + C}{a\eta + c}\right).$$

Nyní jsou proměnné separovatelné.

Příklad.
Odkaz (český zdroj): http://lences.cz/domains/lences.cz/skola/subory/Skripta/BA02-Matematika%20II/M03-Obycejne%20diferencialni%20rovnice%20I.pdf

Uvažujme jednoduchou rovnici

$$y \cdot dx + x \cdot dy = 0.$$

Tato rovnice lze řešit separací proměnných, budeme ji ale řešit jinak. levou stranu rovnice můžeme zapsat jako diferenciál součinu proměnných. Rovnici tedy můžeme přepsat takto

$$d(xy) = 0.$$

Řešením rovnice rovnice je

$$xy = C,$$

kde C je libovolný parametr.
Funkce $z = f(x, y)$ je funkcí dvou proměnných se spojitými parciálnimi derivacemi prvního řádu, pak jejím *totálním diferenciálem:* je

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Je-li tedy

$$f(x, y) = C,$$

potom umíme sestavit diferenciální rovnici prvního řádu pomocí výpočtu totálního diferenciálu.

Definice: Předpokládejme, že výraz obsahující diferenciály tvaru

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

je totálním diferenciálem některé funkce $f(x, y)$. Pak nazýváme diferenciální rovnici

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

exaktní diferenciální rovnicí.

Kritérium exaktnosti: Funkce $M(x, y)$ a $N(x, y)$ jsou spojité a mají spojité parciální derivace prvního řádu. Potom výraz

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

je totálním diferenciálem některé funkce právě tehdy, když platí

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Postup řešení a příklad.

Integrační faktor: Rovnice ve tvaru $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ nemusí být vždy exaktní. V některých případech lze rovnici, která není exaktní na exaktní rovnici převést. Rovnici vynásobíme vhodnou funkcí $\mu(x,y)$, kterou nazýváme *integračním faktorem.* Rovnice, pak vypadá následovně

$$\mu \cdot M(x,y)dx + \mu \cdot N(x,y)dy = 0,$$

nemusí s původní rovnicí být ekvivalentní.

Příklad.

1.2 Homogenní ODR 1. řádu.

1.3 Některé zvláštní případy ODR 1.řádu.

1.4 Vybrané metody řešení ODR vyšších řádů.