Hypotéky, půjčky a důchody

Alexandra Olivová

Duben 2020

1 Základní pojmy

Nejdříve si uvedeme pár základních pojmů.

Nechť P_0 označuje počáteční investici a r je nominální úroková míra za rok. Když $P(t)$ označuje nakumulovanou částku během t let, potom investice P_0 na jeden rok s úrokovou mírou r vynáší

$$P(1) = P_0 + rP_0 = P_0(1 + r). \tag{1}$$

Po dvou letech bude mít výnos

$$P(2) = P(1) + rP(1) = P_0(1 + r) + rP_0(1 + r) = P_0(1 + r)^2.$$

Tedy $P(t)$ je potom dáno vzorcem

$$P(t) = P_0(1 + r)^t. \tag{2}$$

V těchto případech byl úrok připisován ročně. Protože úrok není získaný pouze z P_0, ale taky z úrokování, tak je výnosnější jej připisovat častěji. Úroková míra r tedy nemusí být jen roční. Můžeme ji rozdělit podle různých přechodných období během roku. Například, na pololetní, měsíční nebo denní úrokovou míru nebo dokonce můžeme úročit kountinualně.

1.1 Pololetní, měsíční a denní složené úročení

Za účelem úročení jiného než ročního, potřebujeme modifikovat rovnici (2). Například, když chceme úročit pololetně, (2) upravíme následovně

$$P(t) = P_0(1 + i)^n, \tag{3}$$

kde $i = r/2$ pro dvě přechodná období a $n = 2t$, kde t je počet let. Tedy pro roční období platí

$$P(1) = P_0\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 = P_0\left(1 + r + \frac{r^2}{4}\right).$$

Při srovnání se vzorcem (1), je jasné, že skladání úroku pololetně je více získové než roční.

Podobná úprava je provedena s rovnicí (2), když úročíme měsíčně, tedy

$$P(t) = P_0 \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t},$$

a podobně pro denní úročení v průběhu t let

$$P(t) = P_0 \left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365t}.$$

Obecná formule pro úročení je potom následující

$$P_m(t) = P_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}, \tag{4}$$

kde t je počet let, na které jsme P_0 investovali a m označuje počet přechodných období v průběhu roku.

1.2 Kontinuální složené úročení

V předchozí kapitole jsme zjistili, že častější úročení nám dává větší výnos. Proto si také ukážeme úročení na kontinuální bázi, které maximalizuje úrokový zisk. Zavedeme tedy limitu rovnice (4)

$$P_c(t) = \lim_{m\to\infty} P_m(t) = \lim_{m\to\infty} P_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = P_0 e^{rt}, \tag{5}$$

což nám dá vzorec pro kontinuální úročení.

2 Hypotéky

Nyní nastíníme pozadí hypoték a určíme, jak jsou odvozeny fixní periodické splátky. Jako v předchozí kapitole označíme P_0 jako počáteční kapitál a r je nominální úroková míra za rok. Dobu amortizace (splácení) označíme T a fixní periodická splátka za hypotéku je x. Tyto splátky můžou být placeny například, ročně, měsíčně, atd.

Pro začátek uvažujme případ, kde jsou splátky placeny ročně. Když $P(i)$ je zbývající dluh po i letech a $P(0) = P_0$, potom

$$P(i+1) = P(i)(1+r) - x, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

Tedy, když $i = 0$, tak

$$P(1) = P(0)(1+r) - x = P_0(1+r) - x, \tag{6}$$

dále pro $i = 1$

$$P(2) = P(1)(1+r) - x = P_0(1+r)^2 - x(1+r) - x.$$

Tyto vzorce generují rekurzivně vztah pro $P(T)$, kde pro libovolné $T \in \mathbb{N}$ platí

$$P(T) = P_0(1+r)^T - x\left[\sum_{i=0}^{T-1}(1+r)^i\right]. \tag{7}$$

2.1 Splátky hypotéky

Využitím rovnice (7), můžeme určit fixní periodickou splátku hypotéky x. Podle konečné geometrické sumy:

$$\sum_{i=0}^{T-1} q^i = \begin{cases} \frac{q^T-1}{q-1}, & q \neq 1 \\ T, & q = 1 \end{cases},$$

když následně nastavíme, že $q = 1 + r$, dostaneme vztah

$$\sum_{i=0}^{T-1} (1+r)^i = \frac{(1+r)^T - 1}{(1+r) - 1} = \frac{(1+r)^T - 1}{r},$$

kde $r \neq 0$. Proto se dá rovnice (7) zjednodušit na následující rovnici:

$$P(T) = P_0(1+r)^T - [(1+r)^T - 1]\frac{x}{r}. \tag{8}$$

K určení velikosti splátek musí být hypotéka splacena v půběhu T let, nastavme tedy, že $P(T) = 0$, a když vyjádříme x z (8), dostaneme, že

$$x_1 = \frac{P_0 r(1+r)^T}{(1+r)^T - 1}, \tag{9}$$

což je roční slátka hypotéky.
Pro splátky placené m-krát za rok je vzorec

$$x_m = \frac{P_0 \frac{r}{m}(1+\frac{r}{m})^{mT}}{(1+\frac{r}{m})^{mT} - 1}. \tag{10}$$

2.2 Kontinuální úročení hypotéky

K úročení hypotéky na kontinuální bázi využijeme vztah (5), tedy

$$P(t) = P_0 e^{\rho t}, \tag{11}$$

kde ρ značí úrokovou míru.

Předpokládejme, že je hypotéka splácená kountinuálně tak, že $x > 0$, a P(t) je kapitál. Potom pro malé $\Delta t > 0$ platí, že

$$P(t + \Delta t) \approx P(t) + [\rho P(t) - x]\Delta t \tag{12}$$

nebo

$$\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx \rho P(t) - x.$$

Limitou, kdy $\Delta t \to \infty$ a označením derivace $P'(t)$ dostaneme obyčejnou lineární diferenciální rovnici

$$P'(t) - \rho P(t) = -x \qquad P(0) = P_0.$$

Abychom rovnici vyřešili, vynásobíme ji integračním faktorem $e^{-\rho t}$, tedy

$$[P'(t) - \rho P(t)]e^{-\rho t} = \frac{d}{dt}[P(t)e^{-\rho t}] = -xe^{-\rho t}.$$

Integrací obou stran od 0 do T dostaneme, že

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[P(t)e^{-\rho t}]\mathrm{d}t = -\int_0^T e^{-\rho t}\mathrm{d}t$$

a vyřešením obou integrálu dostaneme

$$P(T)e^{-\rho t} - P_0 = \frac{x}{\rho}(e^{-\rho t} - 1).$$

Nyní vyjádříme $P(T)$ a získáme následující vzorec

$$P(T) = P_0 e^{-\rho t} - \frac{x}{\rho}(e^{-\rho t} - 1),$$

který nám udává zbývající dluh v čase T. K určení splátek x, které splatí hypotéku za T let, nastavíme $P(T) = 0$ a vyjádříme x. Proto je vzorec pro kontinuální splátky následující

$$x_c = \frac{P_0 \rho e^{-\rho t}}{e^{-\rho t} - 1}. \tag{13}$$

2.3 Variabilní úroková míra

V předchozí kapitole jsme předpokládali, že ρ je konstantní míra, nicméně v mnoha případech je ρ variabilní, je funkcí času. Abychom zachovali nastavený čas amortizace, frekvence, ve které jsou placeny splátky, musí být také závislá, tedy $x = x(t)$. Upravený vzorec pro splátky s variabilní úrokovou mírou $\rho(t)$ je dán rovnicí

$$x(t) = P(t)\frac{\rho(t)e^{-\rho(t)(T-t)}}{e^{-\rho(t)(T-t)} - 1}, \qquad 0 \le t < T, \tag{14}$$

kde $x(t)$ je okamžitá míra splácení, která by splatila dluh, když bychom předpokládali, že se úroková míra nebude měnit po čas t. Nyní upravíme vztah (13) využitím variabilní úrokové míry $\rho(t)$. Substitucí (14) za x a přesunutím všech prvků na levou stranu dostaneme, že

$$P'(t) - \rho(t)P(t) + P(t)\frac{\rho(t)}{1 - e^{-\rho(t)(T-t)}} = 0.$$

Následující úpravou pak dostaneme

$$P'(t) + \rho(t)\frac{e^{-\rho(t)(T-t)}}{1 - e^{-\rho(t)(T-t)}}P(t) = 0, \tag{15}$$

a to můžeme vyjadřit jako

$$P'(t) + \alpha(t)P(t) = 0, \tag{16}$$

kde α je odpovídající substituce.

Abychom vyřešili $P(t)$, musíme rovnici vynásobit odpovídajícím integračním faktorem $e^{\int_0^t \alpha(\tau)\mathrm{d}\tau}$ a zintegrovat. Dostaneme, že

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left[P(t)e^{\int_0^t \alpha(\tau)\mathrm{d}\tau}\right]\mathrm{d}t = 0.$$

Spočtením integrálu dostaneme

$$P(t)e^{\int_0^t \alpha(\tau)\mathrm{d}\tau} = P_0,$$

a následným vyjádřením $P(t)$ a dozením α z (15) dostaneme, že

$$P(t) = P_0 \exp\left[-\int_0^t \frac{\rho(t)e^{-\rho(t)(T-t)}}{1-e^{-\rho(t)(T-t)}}\mathrm{d}\tau\right].$$

3 Splácení úvěru

Určení, kdy bude půjčka splacena, vyžaduje odvození podobné u hypoték v předchozí kapitole. V tomto případě předpokládáme, že máme konstantní míru splátek x a variabilní úrokovou míru $\rho(t)$. Tedy

$$P'(t) - \rho(t)P(t) = -x,$$

ze které dosazením dostaneme, že

$$P(t)e^{-\int_0^t \rho(\tau)\mathrm{d}\tau} = P_0 - x\int_0^t e^{-\int_0^\tau \rho(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau$$

a následným využitím odpovídajícího integračního faktoru a výpočtem integrálu dostaneme

$$P_0 = x\int_0^T e^{-\int_0^\tau \rho(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau$$

transcendentální rovnici pro T, která může být vyřešena numericky, když známe míru ρ.

4 Současná hodnota

Současná hodnota znamená, kolik stojí platba očekávaná za t let, nyní. Například, pro měsíční úročení, je současná hodnota PV určena řešením rovnice (4) pro P_0:

$$PV = P_0 = \frac{P_{12}(t)}{(1+i)^{12t}},$$

kde $i = r/12$. Podobně, když hledáme současnou hodnotu investice, která je úročená kontinuálně s konstantní úrokovou mírou, potom podle rovnice (11) dostaneme, že

$$PV = P(t)e^{-\rho t}.$$

Pro variabilní úrokovou míru, kde $P'(t) - \rho(t)P(t) = 0$, dostaneme, že

$$PV = P(t)e^{-\int_0^t \rho(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

5 Důchody

Hypotéky a půjčky jsou formy důchodů; jsou to sekvence plateb, které jsou prováděny na strukturovaném základě. V této kapitole se podíváme na další typ důchodu, kde je investována fixní hodnota, na oplátku máme konstantní tok peněz se sazbou x až do smrti. Tyto důchodové příjmy se liší od hypoték a půjček v tom, že délka života je náhodná proměnná.

Abychom odvodili vzorec pro tyto platby, musíme dále rozvést koncept současné hodnoty. Jak jsme uvedli, důchodové příjmy jsou vypláceny fixní hodnotou K_0 takovou, že $K_0 \geq PV$. Tedy

$$K_0 \geq PV = \int_0^T x e^{-\rho t} \mathrm{d}t = \frac{x}{\rho}(1 - e^{-\rho T}),$$

kde T je čas smrti a ρ je úroková míra založená na kontinuální bázi.

6 Funkce míry rizika

Funkce míry rizika řeší problém variabilní délky života pro určité typy důchodů. Funkce míry rizika se dá určit očekávanou délku života. Když t je věk náhodně vybrané osoby, potom funkce míry rizika $h(t)$ je dána

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} Prob\{A|B\}, \tag{17}$$

kde A je případ, kdy osoba umře během periody $(t, t + \Delta t)$, B je případ, kdy je osoba naživu v čase t a Δt reprezentuje časový přírustek. Pravděpodobnost, že osoba je naživu v čase t se nazývá *survivor function*, značící se $S(t)$, a platí

$$S(t + \Delta t) = Prob\{\bar{A}|B\} \cdot Prob\{B\}, \tag{18}$$

kde $\bar{A}$ značí případ, že je osoba naživu v čase $t + \Delta t$.

7 Důchodový problém

Nyní se vraťme k důchodům. Když označíme současnou hodnotu důchodu za Y, potom

$$Y = \frac{x}{\rho}\big(1 - e^{-\rho T}\big), \tag{19}$$

kde x/ρ je současná hodnota důchodu placeného doživotně. Pravděpodobnost, že současná hodnota je menší nebo rovna hodnotě y, nám ukazuje následující

$$Prob\{Y \leq y\} = Prob\bigg\{\frac{x}{\rho}(1 - e^{-\rho T}) \leq y\bigg\},$$

nebo ekvivalentně

$$Prob\{Y \leq y\} = Prob\bigg\{T \leq \frac{1}{\rho}\ln(1 - \frac{\rho y}{x})\bigg\}.$$

Distributivní funkce $F_Y(y)$ je tedy dána následovně

$$F_Y(y) = Prob\{Y \leq y\} = \begin{cases} 1 - S\Big(-\frac{1}{\rho}\ln(1-\frac{\rho y}{x})\Big), & \rho y \leq x, \\ 1, & \rho y > x, \end{cases}$$

a hustota distributivní funkce $f_Y(y)$ je

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{x-\rho y} S'(-\frac{1}{\rho}\ln(1-\frac{\rho y}{x})\Big), & \rho y \leq x, \\ 0, & \rho y > x. \end{cases}$$

Díky tomu, že $f(t) = -S'(t)$, a to implikuje, že

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{x-\rho y} f(-\frac{1}{\rho}\ln(1-\frac{\rho y}{x})\Big), & \rho y \leq x, \\ 0, & \rho y > x. \end{cases} \tag{20}$$

Když se zaměříme na konstantní riziko $h(t) = \lambda > 0$ a uděláme substituci hustoty distributivní funkcí $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, potom po zjednodušení rovnice (20) dostaneme, že

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{x}(1-\frac{\rho y}{x})^{\frac{\lambda}{\rho}-1}, & \rho y \leq x, \\ 0, & \rho y > x. \end{cases} \tag{21}$$

Využitím tohoto vztahu, očekávaná hodnota současné hodnoty důchodu $E(Y)$ je dána nasledovně:

$$E(Y) = \frac{\lambda}{x}\int_0^{\frac{x}{\rho}} y\Big(1-\frac{\rho y}{x}\Big)^{\frac{\lambda}{\rho}-1} \mathrm{d}y, \tag{22}$$

a substitucí $z = \rho y/x$ a integrací po částech dostaneme

$$E(Y) = \frac{x}{\lambda+\rho}. \tag{23}$$

8 Jak se očekavaná hodnota důchodu mění

Znalost odchylky očekávané doby života je důležitá k posouzení rizika pojišťovny, které přijímá při prodeji důchodu. Z teorie pravděpodobnosti známe:

$$V(Y) = E([Y - E(Y)]^2) = E(Y^2) - [E(Y)]^2.$$

Využitím funkce očekávané hodnoty pro konstantní míru rizika definované vztahy (22) a (23), je odchylka dána následovně

$$V(Y) = \int_0^{\frac{x}{\rho}} y^2 f_Y(y)\mathrm{d}y - \Big(\frac{x}{\lambda+\rho}\Big)^2.$$

Následnou substitucí odpovídající hodnoty pro $f_Y(y)$ z (21) a integrací po částech získáme odchylku:

$$V(Y) = \frac{\lambda x^2}{(\lambda+\rho)^2(\lambda+2\rho)}. \tag{24}$$