Funkcionální analýza

Alexandra Olivová

Květen 2020

1 Topologické vektorové prostory

(definice, příklady a základní vlastnosti)

Je-li X vektorový prostor nad polem $\mathbb{K}$, pak říkáme, že (X, τ) je *topologický vektorový prostor* nad polem $\mathbb{K}$, jestliže τ je taková topologie na množině X vůči níž jsou vektorové operace sčítání a násobení skalárem spojité.
Příklady:

1. $(\mathbb{R}, \tau)$, kde τ je topologie otevřených intervalů, jejich konečných průniků a libovolných sjednocení - přirozená topologie,
2. $(\mathbb{C}, \tau)$,
3. $(\mathbb{R}^n, \tau_{||\cdot||})$, kde $||\cdot||$ je norma na $\mathbb{R}^n$,
4. $(C[0,1], ||\cdot||)$, kde $C[0,1]$ jsou spojité funkce na intervalu $[0,1]$ a $||f|| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$,
5. $(X, \tau_{||\cdot||})$, kde $||\cdot||$ je libovolná norma na X

Spojitost: funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že když $|x - x_0| < \delta$ potom platí, že $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Lemma (o homeomorfismu TVP).

Vlastnosti TVS:

∘ Řekněme, že podmnožina A reálného vektorového prostoru X je *vyvážená*, jestliže platí $I_1 A = A$, kde $I_1 = [-1, 1]$.
Příklad: $X = \mathbb{R}$, rozhodněte, zda A je vyvážená.

1. $A = [-2, 1]$: $[-1, 1] \cdot [-2, 1] = [-2, 2]$ - N,
2. $A = [1, 2]$: $[-1, 1] \cdot [1, 2] = [-2, 2]$ - N,

- Vyvážená množina otevřené množiny nezahrnující 0 by měla být neotevřená.

∘ Řekněme, že množina $A \subset X$ je *pohlcující*, jesliže $\mathbb{R}A = A$.
Příklad: $X = \mathbb{R}$, rozhodněte, zda A je pohlcující.

1. $A = [-1, 1]$ - A,
2. $A = \{0\}$ - N,
3. $A = \{0, 1\}$ - A,
4. $X = \mathbb{R}^2$, potom $A =$ kruh - A
5. $X = \mathbb{R}^2$, potom $A =$ půlkruh - N

Věta: Množina A je pohlcující právě tehdy, když každá přímka procházející počátkem protíná množinu A alespoň v jednom bodě.

Lemma (o zachování algebraických vlastností uzávěrem): Nechť X je TVP a nechť $A \subset X$. Potom platí

$$A \in Lin(Af, Conv, Cone, Bal) \implies \overline{A} \in Lin(Af, Conv, Cone, Bal).$$

Kde

- $A \in$ Lin $\Leftrightarrow A$ je lineární podprostor X,
- $A \in$ Af $\Leftrightarrow A$ je afinní podprostor X,
- $A \in$ Conv $\Leftrightarrow A$ je konvexní podmnožina X,
- $A \in$ Cone $\Leftrightarrow A$ je kužel v X,
- $A \in$ Bal $\Leftrightarrow A$ je vyvážená podmnožina X.

Definice:

$$\begin{aligned}
A \in Lin &\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta : \alpha A + \beta A \subset A, \\
A \in Af &\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta, \alpha + \beta = 1 : \alpha A + \beta A \subset A, \\
A \in Conv &\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \Delta : \alpha A + \beta A \subset A, \\
(\alpha, \beta \in \Delta &\Leftrightarrow \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha + \beta = 1) \\
A \in Cone &\Leftrightarrow \forall \alpha > 0 : \alpha A \subset A, \\
A \in Bal &\Leftrightarrow \forall \alpha, |\alpha| \leq 1 : \alpha A \subset A.
\end{aligned}$$

Lemma (o zachování otevřenosti algebraických operací): Nechť X je TVP a A, B jsou otevřené množiny v X. Potom

- součet $A + B$ je otevřený,
- vyvýžený obal $I_1 A$ množiny A je otevřená, když A zahrnuje 0,
- konvexní obal množiny A je otevřená.

Lemma (o vlastnostech okolí nuly v TVP): Každé okolí $U \subset X$ bodu 0 v TVP:

- je pohlcující a dokonce $\mathbb{N}U = X$, tj. pro každé $x \in X$ existuje $\delta > 0$: $I_\delta \cdot X \subset U$,
- obsahuje otevřené a vyvážené okolí 0,
- obsahuje uzavřené a vyvážené okolí 0.

- 0 může být vektor, záleží na rozměru TVP X.

- Báze. Následující věta umožňuje konstruovat TVP pomocí nějakého systému podmnožin báze okolí 0.

Věta (o bázi okolí 0**)**: Pro každý TVP existuje báze B okolí 0 taková, že:

- každé $U \in B$ je pohlcující a vyvážená,
- když $U \in B$, $t \neq 0$, potom $tU \in B$,
- pro každé $U \in B$ existuje $V \in B$ takové, že $V + V \subset U$,
- pro každé $U_1, U_2 \in B$ existuje $U \in B$ takové, že $U \subset U_1 \cap U_2$.

Naopak, když ve vektorovém prostoru X je dán systém B jeho podmnožin takový, že splňuje všechny vlastnosti, potom existuje (jedinečná) lineární topologie na X, pro kterou B je bazí okolí 0.

Lemma (o součinu a podprostorech): Součin $X \times Y$ dvou TVP X a Y (se součinovou topologií) je TVP. Každý lineární podprostor Y TVS X $(Y \subset X)$ vybavený indukovanou topologií je TVP.

Lineární zobrazení TVP.

- Množina spojitých lineárních zobrazení z TVP X do TVP Y se značí $\mathbf{L}(X, Y)$. (Množina lineárních zobrazení se pak značí $L(X, Y)$.)

Lemma (o spojitosti v bodě): Nechť $f : X \to Y$ je lineární zobrazení TVP. Pokud je f spojité v bodě, potom je spojité všude.

- (pro lineární funkcionály) Lemma otevřenosti: Nechť X je TVP, $f : X \to Y$ je libovolný nenulový funkcionál a A je otevřená množina v X. Potom $f(A)$ je otevřená množina v $\mathbb{R}$. (Jinými slovy, libovolný nenulový funkcionál je otevřený.)

2 Lokálně konvexní prostory

(definice, konvexní množiny)

Řekněme, že množina $A \subset X$ je *konvexní* právě tehdy, když $\alpha A + \beta A \subset A$, kdykoliv $\alpha, \beta \neq 0 : \alpha + \beta = 1$.

Definice: Nechť X je vektorový prostor. Množina $A \subset X$ je konvexní, když

$$x_1, x_2 \in A \implies [x_1, x_2] \subset A,$$

kde $[x_1, x_2]$ označuje úsečku, která spojuje x_1 a x_2:

$$[x_1, x_2] = \{x_1 + t(x_2 - x_1) | 0 \leq t \leq 1\}.$$

- Základní vlastnosti konvexních množin: Konvexnost je zachována libovolným průnikem a konečnou sumací.

Konvexní kombinace a konvexní obal.

- *Lineární kombinace* prvků $x_1, \ldots, x_n$ v lineárním prostoru X je suma $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Když přidáme podmínku, že $\sum \alpha_i = 1$, potom máme *affinní kombinaci.*

(tabulka - str. 15)

Nejdůležitější třída TVP je třída lokálně konvexních topologických vektorových prostorů.

Definice: TVP a jeho topologie je nazývaná *lokálně konvexní*, když v X existuje báze okolí 0.

- všechny předchozí příklady TVP, jsou také LKP. - typickými příklady, který není LKP jsou:

1. prostor všech měřitelných funkcí na $[0, 1]$ s topologií "convergence in measure",
2. prostor l_p, kde $0 < p < 1$.

Lemma (o okolí 0 v LKP): V libovolném LKP existuje báze konvexního vyváženého otevřeného (resp. uzavřeného) okolí 0.

Polonormy a LKP:

Definice: *Polonorma* na vektorovém prostoru X je funkce $p : X \to \mathbb{R}^\bullet$, která splňuje následující podmínky:

1. $p(x) \geq 0, \forall x \in X$,
2. $p(tx) = |t| p(x), \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in X$, když pravá strana dáva smysl,

3. $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X$.

- *Norma* je seminorma, která se rovná 0, v $x \neq 0$ a nikde se nerovná ∞.

(Totalita duálního prostoru) V každém Hausdorfově LKP existuje libovolně mnoho spojitých lineárních funkcionálů (v tomto smyslu je prostor X^* totální.

Věta (o totalitě duálního prostoru): Nechť X je Hausdorfův LKP, a nechť $\tilde{x} \in X$. Když $< X^*, \tilde{x} >= 0$, potom $\tilde{x} = 0$.

3 Hahnova-Banachova věta

(věty o oddělitelnosti)

Hanh-Banachova věta: Nechť X je libovolný vektorový prostor, nechť X_0 je lineární vektorový podprostor X, nechť p je sublineární funkcionál na X a nechť x'_0 je lineární funkcionál na X_0. Předpokládejme, že

$$x'_0 \leq p|_{X_0}.$$

Potom existuje lineární funkcionál x' na X takový, že

$$x'|_{X_0} = x'_0$$

a

$$x' \leq p.$$

- nastínění důkazu.

Nechť X je vektorový prostor, nechť $A, B \subset X$ a nechť $x' \in X' \setminus 0$ (nenulový lineární funkcionál). Řekněme, že X' odděluje A a B, když existuje $\gamma \in \mathbb{R}$ takové, že

$$A \subset \{x \in X| < x', x > \geq \gamma\},$$
$$B \subset \{x \in X| < x', x > \leq \gamma\}$$

tedy, když

$$< x', B > \leq < x', A > .$$

(obrázek)

Separační věta: Nechť X je TVP a nechť A, B jsou neprázdné konvexní podmnožiny X bez společných bodů a jedna z nich, řekněmě A, má neprázdný vnitřek:

$$A, B \in Conv, intA \neq 0, B \neq 0, A \cap B = 0.$$

Potom existuje nenulový spojitý lineární funkcionál x^* na X, který odděluje A a B.

Nechť X je vektorový prostor, nechť $A, B \subset X$ a nechť $x' \in X'$. Řekněme, že x' *strikně odděluje* A a B, když existuje neprázdný otevřený interval $I \subset \mathbb{R}$, takový, že

$$< x', A > \leq I \leq < x', B >,$$

nebo ekvivalentně

$$\sup < x', A > < \inf < x', B > .$$

Striktně separační věta: Nechť X je LKP, nechť A je neprázdná uzavřená konvexní množina v X, nechť $\tilde{x} \in X \setminus A$. Potom existuje $x^* \in X^*$, který striktně odděluje A a $\tilde{x}$ tak, že

$$\sup < x^*, A > < < x^*, \tilde{x} > .$$

(Je jasné, že aby x^* splňovalo nerovnost, musí být nenulové, $< x^*, x >= \alpha$.)

(obrázek)

Lemma (o netriviálním anihilátoru): Nechť X je LKP a nechť X_0 je uzavřený vektorový podprostor prostoru X, $X_0 \neq X$. Potom existuje nenulový $x^* \in X^*$ takový, že platí

$$< x^*, X_0 >= 0.$$

Pro libovolnou množinu $A \subset X$, je množina

$$A^\perp = \{x^* \in X^* | < x^*, A >= 0\}$$

nazývaná *anihilátor* množiny A.

4 Fréchotovy prostory

(Banachova věta o inverzním zobrazení, věta o uzavřeném grafu)

Definice: TVP X je nazývaný F-prostor, když

1. jeho topologie je generovaná nějakou metrikou ρ, která je *invariant relative to translations* ve smyslu, že

$$\rho(x, y) = \rho(x - y, 0) \quad \forall x, y \in X,$$

2. metrický prostor (X, ρ) je úplný (nezávisí na volbě metriky).

- Lokálně konvexní F-prostor se nazývá *Fréchetův prostor*.

Banachova věta o otevřeném zobrazení: Nechť X a Y jsou F-prostory a nechť $A : X \to Y$ je spojitý lineární operátor na Y (surjektivní). Potom A je otevřené zobrazení (obraz otevřené množiny je otevřená množina).

(jednoduchý důsledek Banachovy věty o otevřeném zobrazení) Banachova věta o inverzním zobrazení: Libovolná spojitá lineární bijekce mezi F-prostory je homeomorfismus (inverzní zobrazení je lineární a spojité).

Definice: Zobrazení f z topologického prostoru X do topologického prostoru Y je *uzavřené*, když jeho graf

$$gff = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

je uzavřená množina v prostoru $X \times Y$.

Příklad: Každá spojitá funkce je uzavřená.

Věta o uzavřeném grafu: Každé uzavřené lineární zobrazení z jednoho F-prostoru do jiného takového prostoru je spojité.

5 Omezené množiny

(omezené operátory, Banachova-Steinhausova věta)

Omezené množiny v TVP jsou množiny, které mohou být pohlceny okolím 0.

Definice: Množina A v TVP je *omezená* ($A \in Bd$), když pro každé okolí 0 U, existuje $\delta > 0$ taková, že $\delta A \subset U$.

Příklad: Každý bod v TVP je omezená množina (každé okolí 0 je pohlcující).

Základní vlastnosti omezených množin.

(Podle intuice, kompakntní množiny jsou omezené.) Věta o omezenosti kompaktních množin: V TVP je každá kompaktní množina omezená.

Poznámka: V konečně-dimenzionálních prostorech - každá omezená množina je *relativně kompaktní*, tedy má kompaktní uzávěr: $A \in RelComp \Leftrightarrow \overline{A} \in Comp$. V nekonečně dimenzionálních prostorech to tak nefunguje - v nekonečném normovaném prostoru není uzavřená jednotková koule kompaktní.

- V LKP omezenost množin může být ověřena pomocí polonorem - charakterizace omezenosti v LKP.

Nechť X je LKP a $\{p_\alpha\}$ je libovolný generovaný systém polonorem na X. Potom množina $A \in X$ je omezená právě tehdy, když každé *number set* $p_\alpha(A)$ je omezená v $\mathbb{R}$.

Lemma o omezených posloupnostech a konvergenci: Nechť X je TVP.

1. Každá konvergující posloupnost v X je omezená.
2. Když je posloupnost $\{x_n\}$ omezená, potom $t_n x_n \to 0$ pro každou posloupnost $t_n \to 0$.

Sequential characterization of boundedness: Množina v TVP je omezená právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ a každou posloupnost reálných čísel $\{t_n\}$ takovou, že $t_n \to 0$ platí, že $t_n x_n \to 0$.

Důsledek: V (polo)normovaném prostoru je množina A omezená právě tehdy, když je *bounded in (semi)norm*, tedy když pro nějaké $c \geq 0$ platí, že $||x|| \leq c, \forall x \in A$.

Poznámka: V F-prostorech omezenost v metrice neznamená omezenost. Opravdu, koule se středem v 0 v metrice, která generuje topologii, jsou okolími 0 a posle pravidla, okolí 0 nejsou omezená. Když v Hausdorfově TVP existuje omezené konvexní okolí 0, potom je ten prostor *normovatelný*.

Omezené operátory.

Definice: Lineární zobrazení $A : X \to Y$, kde X a Y jsou TVP, je nazývané *omezené*, když každý obraz omezené množiny je omezená množina.

Příklad: Když X, Y jsou normované prostory, potom jsou pro lineární zobrazení $A : X \to Y$ následující podmínky ekvivalentní:

1. A je spojité,
2. A je omezené,
3. A je omezené na jednotkové kouli, tedy $||x|| \leq 1 \implies ||Ax|| \leq c$ pro nějaké $c \geq 0$.

Věta o omezenosti a spojitosti: Nechť X, Y jsou TVP a $A : X \to Y$ je lineární zobrazení.

1. A je spojité $\implies$ A je omezené.
2. Když X je metrizovatelný TVP, potom A je omezená $\implies$ A je spojitá.

Equispojitost a equiomezenost (rovnoměrně).

Definice: Nechť X, Y jsou TVP. Soubor spojitých zobrazení $A_\alpha : x \to Y, \alpha \in A$ se nazývá:

1. *equispojitý*, když pro každé okolí 0 $V \in Y$ existuje okolí 0 $U \in X$ takové, že $A_\alpha U \subset V, \forall \alpha \in A$,
2. *equiomezený*, když pro každou omezenou množinu $B \in X$ existuje omezená množina $C \in Y$ taková, že $A_\alpha B \subset C, \forall \alpha \in A$,
3. *bodově ohraničený*, když pro každý bod $x \in X$ množina $\{A_\alpha x | \alpha \in A\}$ je omezená v Y.

Banachova-Steinhausova věta: Nechť X, Y jsou F-prostory. Když systém spojitých lineárních zobrazení z X do Y je bodově ohraničný, pak je equispojitý.

6 Základy konvexní analýzy

(konvexní funkce, dualita)

- V konvexní analýze zavedeme *rozšířenou reálnou přímku*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

- *Definiční obor* funkce $f : X \to \overline{R}$ je definován následovně

$$domf = \{x \in X | f(x) \neq \infty\}$$

a jejím *epigrafem* je

$$epif = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} | \alpha \geq f(x)\}.$$

Definice: Funkce $f : X \to \overline{R}$ je nazývaná *konvexní funkcí* právě tehdy, když je její epigraf konvexní množina.

- $domf \subset X$ je projekce $epif \subset X \times \mathbb{R}$ do X. (příklady a obrázky)

Lemma: Funkce f je konvexní právě tehdy, když platí Jensenova nerovnost

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

pro každé $x_1, x_2 \in domX$ a pro každé $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta$, $(\alpha_1 + \alpha_2 = 1)$.

Základní vlastnosti konvexních funkcí:

- Konvexnost je zachována libovolným supremem a součtem:

$$f_i \in Conv \implies V f_i \in Conv,$$

$$f, g \in Conv \implies f + g \in Conv.$$

Sublineární funkce (podtřída konvexních funkcí), $\mathbb{R}^\bullet = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Definice: Funkce $p : X \to \mathbb{R}^\bullet$ je *sublineární*, když *epip* je konvexní kužel.

Příklady sublineární funkce.

<u>Základní vlastnosti sublineárních funkcí</u>:

- Konvexnost je zachována libovolným supremem a součtem:

$$p_i \in Conv \implies V p_i \in Conv,$$

$$p, q \in Conv \implies p + q \in Conv.$$

Důležitý příklad sublineární funkce je *Minkowského funkce* konvexních množin. Pro libovolnou množinu A ve vektorovém poli X je jeho *Minkowského funkcí* μA, což je funkce na X, definovaná formulí

$$\mu A = \inf\{\alpha > 0 | x \in \alpha A\} = \inf\{\alpha > 0 | \alpha^{-1} x \in A\},$$

$$(\inf 0 = +\infty).$$

<u>Základní vlastnosti Minkowského funkce:</u>

1. Pro každou konvexní množinu A je Minkowského funkce μA sublineární.
2. $A \subset B \implies \mu A \geq \mu B$.

Definice: Nechť X je TVP. Množina

$$X^* = L(X, \mathbb{R})$$

všech spojitých lineárních funkcionálů se nazývá *duální prostor*.

Topologický a algebraický duální prostor.

Příklad:

<u>Párování:</u> X, Y jsou VP. Tvoří *duální pár* vzhledem k bilineární formě $< \cdot, \cdot >$: $X \times Y \to \mathbb{R}$ (párování) pokud platí:

1. $< x, y >= 0$, pro každé $x \in X \to y = 0$,
2. $< x, y >= 0$, pro každé $y \in Y \to x = 0$.

Operátory konvexní analýzy:

Duality theorem:

7 Normované prostory

(definice a příklady, Kolmogorovova věta o normovatelnosti)

Definice: *Norma* na vektorovém prostoru X je funkce $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$, která splňuje následující podmínky:

1. $||x|| \geq 0$ pro každé $x \in X$, $||x|| = 0$ potom $x = 0$,
2. $||tx|| = t||x||$,
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Normovaný prostor je vektorový prostor opatřený normou.

Spojitost podle norem.

Norma operátoru: $A \in L(X,Y)$, kde X, Y jsou normované prostory. $||A|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax||$.

Základní nerovnost pro normy operátoru.

Banachovy prostory - TVP, ketré jsou úplné a normované.

Úplný TVP (s ohledem na metriku $d(x,y) = ||x - y||$ - každá Cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Věta: Nechť X je normovaný prostor, Y je Banachův prostor. Pak prostor $L(X,Y)$ je úplný (Banachův).

Duál normovaného prostoru - $X^* = L(X,Y)$. Duální prostor ke každému normovanému prostoru X může být opatřený normou.

Příklady:

Topologický vektorový prostor je *normovatelný*, když je jeho topologie generována normou. Každý NP je Hausdorffův a lokálně konvexní.

Kolmogorova věta o normovatelnosti: Nechť X je Hausdorffův LKP. Potom X je normovatelný právě tehdy, když existuje ohraničené okolí 0.

8 Hilbertovy prostory

(skalarní součin, ortogonální projekce, Hilbertova báze, ortogonalizace)

Banachovy prostory - TVP, ketré jsou úplné a normované.

Úplný TVP (s ohledem na metriku $d(x,y) = ||x-y||$ - každá Cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Definice: *Skalární součin* ke bilineární funkce $(|) : X \times X \to \mathbb{R}$, která je

1. symetrická: $(x|y) = (y|x)$ pro každé $x, y \in X$,
2. $(x|x) \geq 0$.

Banachův prostor se skalárním součinem a normou $||x|| = \sqrt{(x|x)}$ je *Hilbertův prostor.*

Definice: Vektorový prostor se nazývá *pre-Hilbertův*, jestliže je na něm dán skalární součin, tedy bilineární funkce$(|) : X \times X \to \mathbb{R}$, která je

1. symetrická: $(x|y) = (y|x)$ pro každé $x, y \in X$,
2. $(x|x) \geq 0$.
   A VP je *Hilbertův*, jestliže
3. $(x|x) = 0, x = 0$,
4. X je úplný v normě $||x||^2 = (x|x)$.

Věta o ortogonální projekci: Nechť X je HS, A je neprázdná uzavřená konvexní množina v X, $\tilde{x} \in X$. Potom existuje $\tilde{x_0} \in A$ (nejmenší vzdálenost od bodu $\tilde{x}$)

$$||\tilde{x} - \tilde{x_0}|| = \min_{x \in A} ||\tilde{x} - x||.$$

Tento bod je jediný a nazývá se ortogonální projekce $pr_A \tilde{x}$ bodu $\tilde{x}$ na A.

Definice: Systém $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ vektorů v pre-HS se nazývá *ortogonální systém (ONS)* jestliže:

$$(e_\alpha | e_\beta) =$$

Definice: ONS $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ v pre-HS se nazývá *Hilbertova báze*, jestliže pro každé $x \in X$ platí

$$x = \sum c_\alpha e_\alpha,$$

kde $c_\alpha = (x|e_\alpha)$.

Ortogonalizace: