# Finanční matematika

Alexandra Olivová

March 8, 2022

## 1 Náhodná procházka

- poznámky dr. Nábělkové

## 2 Podmíněná očekávání

- poznámky dr. Nábělkové

## 3 Wienerův integrál

- poznámky dr. Nábělkové

Riemannuův integrál Wienerova procesu

Wienerova integrace

## 4 Itoův integrál

## 5 Itoovo lemma

## 6 Stochastické diferenciální rovnice

Klasická diferenciální rovnice: $x'(t) = a(t, x(t)), x(0) = X_0$ - jsme schopni určit řešení.

Jak dostaneme do ODR náhodný prvek? - Řekneme, že počáteční podmínka je $x(0) = X_0(\omega), \omega \in \Omega$, kde $X_0$ je náhodná veličina.

Nejsme schopni určit řešení. Řešením je soustava (stochastický proces) řešení s danou pravděpodobností.

Pro dané $\omega \to$ WP $\to$ stochastický proces, sledujeme jen 1 realizaci.

Takto definovaná DR je náhodná diferenciální rovnice. Má blíže k ODR - stejný způsob řešení.

Separace proměnných:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t dx = \int_0^t a(s, x(s))ds,$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s, x(s))ds.$$

Symbolické vyjádření (1): $dX_t = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW_t$ (Itoova SDR). $X$ jsou stochastické procesy.

Integrace (dostaneme něco, co připomíná Itoovo lemma) (2): $X_T - X_0 = \int_0^T a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$ - Itoova SDR - koretní vyjádření.

Řešení se mění v závislosti na čase, ale také WP má vliv na řešní DR. Jsou různé stochastické rovnice, záleží na stochastickém procesu.

Poznámka: Ačkoliv rovnice (1) vypadá obdobně jako ODR $dx = a(t, x(t))dt$ je zásadní rozdíl mezi ODR a SDR.

1. ODR může být psána ve tvaru $x'(t) = \frac{dx}{dt} = a(t, x(t))$, tedy diferenciály $dx$, $dt$ jsou výrazy, které můžeme chápat jako reálné proměnné a můžeme jimi obě strany násobit i dělit.

2. V případě SDR je situace naprosto odlišná, WP není nikde diferencovatelný. Výrazy $\frac{dW_t}{dt}$ a $\frac{dX_t}{dt}$ nemají žádný smysl a nemůžeme s nimi pracovat jako v ODR. Z praktického hlediska můžeme využít rovnici (1) k výpočtu, pokud je to z hlediska značení vhodné, ale je potřeba mít na paměti, že se jedná pouze o symbolickou reprezentaci.

Funkce $a, b$ jsou deterministické funkce, ale jejich proměnné jsou stochastické procesy, kromě času $t$.

Co budeme považovat za řešení? Existence a jednoznačnost řešení?

**Definice:** Řešením Itoovy stochastické diferenciální rovnice nazýváme stochastický proces $\{X_t, t \in [0; T]\}$, který vyhovuje následujícím podmínkám:

1. SP je adaptovaný vzhledem k Wienerově filtraci.

2. Oba integrály, které se vyskytují v rovnici (2) jsou řádně definovány (adaptované, ohraničené).

3. $X_t$ je funkcí WP a koeficientů (funkcí) $a, b$ - (změna $a, b \to$ změna řešení, ale také jiný WP, jiné řešení).

**Věta:** Předpokládejme, že počáteční podmínka $X_0$

1. má konečný druhý moment - $E(X_0^2) < \infty$,

2. je nezávislá na WP.

Dále předpokládejme, že funkce $a(t,x)$ a $b(t,x)$ jsou pro všechna $t \in [0,T]$ a pro všechny proměnné $x, y \in \mathbb{R}$ (pro poslední podmínku)

1. jsou spojité,
2. splňují Lipschicovu podmínku vzhledem ke 2.proměnné: $|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq k|x-y|$.

Potom má Itoova SDR (2) jediné řešení.

# 7 Odvození Black-Scholesovy rovnice

Rozdíl mezi WP a křivkou akcií - není záporný.

Transformace WP pro zobrazení nákupu a prodeje akcií: $X_t = \sigma W_t + \mu t$ (martingal a trend) - obecný tvar stochastického procesu. Toto ještě může být záporné.

Úprava: $S_t = S_0 \exp\{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\}$.

Ukažte pomocí Itoova lemmatu, že proces splňuje tuto SDR: $dS_t = \sigma S_t dW_t + \mu S_t dt$.
$f(x,t) = \exp\{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\}$
$df(t, W_t) = f'(t, W_t)dW_t + [\frac{1}{2}f''(t, W_t) + \dot{f}(t, W_t)]dt$
Derivace:

Dosazení: $\sigma \exp\{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\}dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \exp\{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\}dt + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \exp\{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\}$
Úprava: $dS_t = \sigma \exp\{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\}dW_t + \mu \exp\{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\}dt$,
$dS_t = \sigma S_t dW_t + \mu S_t dt$.
$S_0$ - konstanta, pro jednoduchost rovna 1.

**Definice:** Evropská kupní opce s realizační cenou E a datem uplatnění T dává jejímu držiteli příležitost (právo nikoli povinnost) koupit od upisovatele jednu akcii dané společnosti v čase T za cenu E.
- Americkou opci můžeme uplatnit kdykoliv v časovém intervalu.

- $S_T \leq E$ - bezcenná opce¨
- $S_T > E$

Hodnota opce v čase T: $(S_T - E)^+ = \max\{0, S_T - E\}$
Cena opce: $V(t, S_t)$ - závisí na ceně akcie a čase.
$V(T, S_T) = (S_T - E)^+$
Chceme zjistit cenu opce v čase 0: $V(0, S_0) =?$ - To řeší B-S rovnice.

*Příklad:* Aplikujte IL na $V(t, S_t)$ za účelem výpočtu $dV(t, S_t)$, $S_t$ je proces, ale ne WP.
$df(t, X_t) = f'(t, X_t)a(t, X_t)dW_t + [\dot{f}(t, X_t) + f'(t, X_t)b(t, X_t) + \frac{1}{2}f''(t, X_t)a^2(t, X_t)]dt$
$dX_t = a(t, X_t)dW_t + b(t, X_t)dt$
$dS_t = \sigma S_t dW_t + \mu S_t dt$
IL ($f = V$): $dV(t, S_t) = \sigma S_t V'(t, S_t)dW_t + [\dot{V}(t, S_t) + \mu S_t V'(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 V''(t, S_t)]dt$

Samofinancující portfolio - tvořeno dluhopisy (bezriziková složka) a riziková aktiva (akcie). Portfolio bude mít stejnou rizikovost jako opce (o opci toho zatím moc nevíme).
Samofinancující - finance neproudí dovnitř, ke změnám dochází předprodejem.

Zajímá nás: