Diferenciální rovnice

Alexandra Olivová

Květen 2020

1 Existence a jednoznačnost řešení

(počáteční úlohy obyčejné diferenciální rovnice)

Definice: Rovnice, kde neznámou je funkce nebo více funkcí, a která obsahuje nejen funkce samotné, ale i jejich derivace se nazývájí diferenciální rovnice.

Definice: Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojitá diferencovatelná. ODR budeme pak rozumět rovnici ve tvaru

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),$$

kde $\dot{x}(t)$ vyjadřuje $\frac{\partial x(t)}{\partial t}$.

Poznámka:

1. Diferenciální rovnice zahrnující obyčejné derivace jsou nazývány obyčejné diferenciální rovnice (ODR).
2. t - nezávislá proměnná, x - závislá proměnná

- ODR popisují reálný proces, důležitý je i počáteční stav, ten pak odpovídá speciální hodnoté konstanty. Každé řešení musí tedy obsahovat konstantu.

Řád ODR: je řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Definice: Funkce $x = \varphi(t)$ nezávislé proměnné t definované na nějakém intervalu (a, b) (případ ∞ není vyloučen), která když zasubstituju v rovnici $\dot{x} = f(t, x)$, omezuje tuto rovnici na identitu na celém intervalu, se nazývá řešení.

Poznámka:

1. $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, bod: $(t, \varphi(t)) \in \Gamma$.
2. Substituce je možná, když $\varphi(t)$ má první derivaci na intervalu (a, b).
3. Geometrickým řešením je křivka s rovnicí $x = \varphi(t)$. Tato křivka je nazývána integrační křivkou rovnice $\dot{x} = f(t, x)$.

4. Geometrická interpretace - tg line v každém bodě, (line segments) konstruované ve směrovém poli.

- Kolik řešení má může mít diferenciální rovnice? - nekonečně mnoho (konstanty). Je lepší popsat struktutu řešení řešení než jej počítat.
- Jaká je struktura množin řešení? - záleží na formě diferenciální rovnice.
- Pokud je dána počáteční podmínka, máme jen 1 řešení.

Definice: Problém řešení rovnice $\dot{x} = f(t, x)$ je spojen s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$, která je nazývaná Cauchyho problém nebo počáteční úlohy (rovnice a počáteční podmínka).

Věta o existenci a jednoznačnosti: Nechť $\dot{x} = f(t, x)$ je diferenciální rovnice 1. řádu:

1. funkce $f(t, x)$ je definována na nějakém oblasti Γ v rovině tx.
2. funkce $f(t, x)$ a její parciální derivace $f_x(t, x)$ jsou spojité na celé oblasti Γ

Pak VĚTA tvrdí, že:

1. Pro každý bod (t_0, x_0) z oblasti Γ existuje řešení: $x = x(t)$ rovnice $\dot{x} = f(t, x)$, které vyhovuje podmínce $x(t_0) = x_0$.
2. Pokud řešení $x = x_1(t)$ a $x = x_2(t)$ rovnice $\dot{x} = f(t, x)$ se shodují pro hodnutu $t = t_0$, ta že je $x_1(t_0) = x_2(t_0)$. Pak tyto řešení jsou si rovny pro všechny hodnoty t, ve které jsou definovány.

2 Lineární diferenciální systémy

(homogenní a nehomogenní systémy, vlastnosti řešení)

Lineární systém:
$\dot{x_1} = a_{11}(t)x_1 + ... + a_{1n}(t)x_n + b_1(t)$
$\dot{x_2} = a_{21}(t)x_1 + ... + a_{2n}(t)x_n + b_2(t)$
$\dots$
$\dot{x_n} = a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)$

- Jestliže $b_1, ..., b_n$ jsou identicky 0, tak říkáme, že lineární systém je homogenní, jinak jde o nehomogenní systém.
- Převod soustavy na obyčejnou diferenciální rovnici II. řádu.
- Ve speciálním případě můžeme soustavu 2 diferenciálních rovnic převést na lineární diferenciální rovnici II. řádu. Můžeme uvažovat i libovolné n.

1. $x = (x_1, ..., x_n)^T$.
2. A - matice
3. $b = (b_1, ..., b_n)^T$.
4. Vektorový zápis:

Věta o existenci a jednoznačnosti: Nechť $\dot{x} = f(t, x)$ je systém ODR I. řádu.

1. f je definované na $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
2. $f_1, ..., f_n$ jsou spojité funkce. A také $\frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}x_j}$ jsou spojité funkce, $i, j = 1, ..., n$.

Potom platí:

1. Pro každý bod $(t_0, x_{10}, ...x_{n0})$ existuje řešení $x_i = \varphi_i(t), i = (1, ..., n)$ systému takové, že $x_{i0} = \varphi_i(t_0)$.
2. Jestliže $x_i = \Psi_i(t)$ a $x_i = \chi_i(t)$ jsou 2 řešení splňující podmínku $\Psi_i(t_0) = \chi_i(t_0) = x_{i0}, i = (1, ..., n)$ a definované na intervalech obsahujících t_0, pak tato řešení splývají všude, kde jsou společně definovaná.

Řešením rozumíme systém funkcí, po jejichž dosazení do systému dostáváme indentity (vyhovují systému).

Poznámka: Z věty o existenci a jednoznačnosti vyplývá na základě požadavku spojitosti funkcí $\frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}x_j}$, že lineární systém má ve spojitosti s danou počáteční podmínkou jediné řešení, jestliže funkce a_{ij} a b_i jsou spojité.

Věta: Jsou-li vektory $x_1, ..., x_n$ řešením homogenní lineární soustavy (HLS), pak je i jejich libovolná lineární kombinace také řešením HLS.

Řešení HLS: $c_1x_1 + ... + c_nx_n$.

Definice: Řekněme, že funkce (vektory) $x_1, ..., x_n$ jsou fundamentilním řešením systému $\dot{x} = Ax$ na intervalu (a, b), když každé řešení HLS může být napsáno jako jeho lineární kombinace. V tomto případě $c_1x_1 + ... + c_nx_n$ nazýváme obecným řešením HLS na intervalu (a, b).

Definice: Funkce $x_1, ..., x_n$ jsou lineárně nezávislé na intervalu (a, b), pokud pro konstanty platí $c_1x_1 + ... + c_nx_n = 0$, když $c_1 = ... = c_n = 0$.

Wronskián (řešení, systému):

Věta: Funkce $x_1, ..., x_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když je jejich Wronskián nenulový v nějakém bodě $t_0 \in (a, b)$.

Věta o obecném řešení: Nechť $x_1, ..., x_n$ jsou lineárně nezávislé řešení systému $\dot{x} = Ax$, kde A je spojitá na intervalu (a, b). Pak obecné řešení HLS je rovno $x(t) = c_1x_1 + ... + c_nx_n$.

Uvažujme $\dot{x} = Ax$, A je konstantní matice.

- Řešení je definované na intervalu (a, b) - oblast funkcí $a_{ij}(t)$, když funkce a_{ij} jsou konstantní jejich oblast je v $(-\infty, \infty)$.
- Řešení homogenního systému je definované pro všechny $t \in \mathbb{R}$.
- Skalárová rovnice - substituce e^{mt} pro závislé proměnné je substitice $x(t) = e^{\lambda t}v$.

Nelineární systém:
$\dot{x_1} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n)$
$\dot{x_2} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n)$
$\dots$
$\dot{x_n} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n)$

- Definované na oblasti $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
- $x = (x_1, ..., x_n)^T$.
- $f(t, x) = (f_1(t, x), ..., f_n(t, x))^T$.
- Vektorový zápis:

3 Autonomní diferenciální systémy

(typy stacionárních bodu dvourozměrného systému)

Definice autonomního systému:

- $\dot{x} = Ax$, $A = 2x2$,
- $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$
- Speciální případ: $\dot{x} = f(x)$ - autonomní systém (bez t na pravé straně), f je definované na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

Interpretace řešení autonomního systému:

1. $x = \varphi(t)$ - křivka v prostoru $\Omega \times \mathbb{R}$.
2. Křivka v Ω s parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ - trajektorie.

Trajektorie je projekce křivky z prostoru $\Omega x \mathbb{R}$ do prostoru Ω.

Definice: Bod x_0 je stacionárním bodem rovnice $\dot{x} = f(x)$, když $f(x) = 0$.

Typy stacionárních bodů v rovině. (Stacionární bod x_0 je):

1. Centrum: Existuje tady prstencové (ryzí) okolí $P(x_0)$ takové, že skrz každý bod $a \in P(x_0)$ prochází právě jedna trajektorie, která je uzavřená a uvnitř leží x_0.
2. Ohnisko: Existuje tady prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že bod $x(t)$ na trajektorii x splňuje následující podmínky: $x(t)\ tox_0$ pro $t \to \infty$ nebo $t \to -\infty$ - limita úhlu mezi vektorem $x(t)x_0$ a nejakým pevným (fixovaným) vektorem x_0x_1 je nekonečná.
3. Uzel: Existuje tady prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že bod $x(t)$ na trajektorii x splňuje následující podmínky: $x(t)\ tox_0$ pro $t \to \infty$ nebo $t \to -\infty$ - limita úhlu mezi vektorem $x(t)x_0$ a nejakým pevným (fixovaným) vektorem x_0x_1 je konečná.
4. Sedlo: Existuje pouze konečný počet trajektorií s podmínkou: $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$ nebo $\lim_{t\to-\infty} x(t) = x_0$.

Určení stacionárních bodů podle vlastních čísel matice:

4 Stabilita stacionárního řešení

(systému obyčejných diferenciálních rovnic, linearizace)

Hodně ODR neumíme řešit obecně, ale i tak můžeme zjistit informace o obecném řešení. Většinou máme 1 řešení a zkoumáme, jak se chovají ostatní řešení vůči tomu, co známe (vzdálenost,...).

- $\dot{x} = f(t, x)$ - neumíme vyřešit.
- Chceme mít alespoň nějaké informace o chování řešení.
- Někdy můžu najít alespoň nějaké řešení (obvykle $x^*(t)$).
- Zkoumám, jak se ostatní řešení chovají ve vztahu k $x^*(t)$, jestliže běží čas.

Posunutí:

- Řešení $x(t)$ můžeme vyjádřit jako $x^*(t) + y(t) = x(t)$ nebo $y(t) = x(t) - x^*(t)$.
- Pokud je $y(t)$ velmi malé, pak $x(t)$ je velmi blízko $x^*(t)$.
- Místo vzdálenosti $x(t)$ a $x^*(t)$ můžeme zkoumat vzdálenost $y(t)$ od 0.

Definice: Říkáme, že nulové řešení rovnice $\dot{x} = f(t, x)$ je (Ljapunovsky) stabilní, jestliže ke každému $t_0 > a$ a pro káždé $\varepsilon > 0$, existuje $\delta > 0$, $[\delta(t_0, \varepsilon)]$ takové, že pro každé řešení $y(t)$ naší rovnice splňující podmínku $|y(t_0)| < \delta$ platí $|y(t)| < \varepsilon$, pro každé $t \geq t_0$.

Definice (stejnoměrná stabilita): Říkáme, že nulové řešení rovnice $\dot{y} = g(t, y)$ je stejnoměrně stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že každé řešení splňující podmínku $||y(t_0)|| < \delta$ splňuje pro všechny $t \geq t_0$ podminku $||y(t)|| < \varepsilon$.

Definice (asymptotická stabilita): Říkáme, že nulové řešení rovnice $\dot{y} = g(t, y)$ je asymptoticky (a stejnoměrně) stabilní, pokud:

1. *je stabilní (stejnoměrně).*
2. *pro každé* t_0 *existuje* $\delta_0 > 0$ *takové, že pro každé řešení splňující podmínku* $||y(t_0)|| < \delta_0$ *platí* $\lim_{t\to\infty} ||y(t)|| = 0$.

- Stabilita: jsme-li dostatečně blízko v nějakém čase, zůstanu blízko navždy.
- Asymptotická stabilita: stabilita + jsem-li blízko, dostávám se blíž a blíž.
- Autonomní systém: $\dot{x} = f(x)$ - není tam čas.
- Pro autonomní systém splývá stabilita i stejnoměrná stabilita.

- Příklad chování systému na nutnost předpokladu stability v definici asymptotické stability.
- Zahrnuje pojem stability proto, že můžeme vytvořit systém, ve kterém běží-li čas, trajektorie se blíží k nulovému řešení, ale jsou zde středně dobé intervaly porušující podmínku stability (řešení opouští ϵ vzdálenost.

5 Parciální diferenciální rovnice

(počáteční a okrajový problém, lineární rovnice 2. řádu)

Definice: Výraz ve tvaru

$$F\big(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x\big) = 0 \quad x \in \Omega \tag{1}$$

se nazývá *parciální diferenciální rovnice k-tého řádu*, kde $F\big(\mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega\big) \to \mathbb{R}$ je daná funkce a $u : \Omega \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce.

Poznámky:

- $x = (x_1, \dots, x_n)$
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - multiidex
- $D^{|\alpha|}u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, kde $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

- PDR vyřešíme, když najdeme všechny možné funkce u, které splňují (1).

Řád PDR: je řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Obecné řešení: Soubor všech řešení dané funkce. Obsahuje konstanty, volitelné funkce.

Definice:

1. PDR (1) se nazývá *lineární*, když má tvar

$$\sum_{|\alpha| \geq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x)$$

   pro dané funkce a_α a f.

   (Tato PDR se nazývá homogenní, když $f = 0$.)

2. PDR (1) se nazývá *semilineární*, když má tvar

$$\sum_{|\alpha| \geq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0\big(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x\big) = 0.$$

3. PDR (1) se nazývá *kvazilineární*, když má tvar

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha\big(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x\big) d^\alpha u + a_0\big(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x\big) = 0.$$

4. PDR (1) je *plně nelineární*, když

Homogenní lineární rovnice 1. řádu
- derivace ve směru vektoru, charakteristický systém.

- Rovnice $a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0$ připouští nekonečně mnoho řešení. Abychom zvolili jedno, rovnici doplníme o *počáteční podmínku* $u=u_0$ na křivce Γ (Γ je křicka v Ω, u_0 je daná funkce).

Existenční věta: Nechť Ω je oblast v rovině obsahující křivku $\Gamma=\{(x,y)\in \Omega, x=\gamma_1(s), y=\gamma_2(s), s\in I\}$ a uvažujme úlohu

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{2}$$

$$u=u_0. \tag{3}$$

Nechť koeficienty $a,b\in C^1(\Omega)$ a Γ je hladká křivka ($\gamma_1,\gamma_2\in C^1(I)$) a platí

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \gamma_1' & \gamma_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Potom existuje řešení ulohy (2) a (3) v okolí Γ. Toto řešení je jediné.

- Abychom určili pouze jedno řešení, můžeme rovnici doplnit o také *okrajovou podmínku*:

1. Dirichletova okrajová podmínka (předepisuje hodnoty funkce) - $x=b$

$$u(b,t)=u_0(t),$$

2. Neumannova okrajová podmínka (předepisující derivace funkce) -

$$u_x(b,t)=u_0(t),$$

3. Newtonova okrajová podmínka -

$$u_x(b,t)+\mu(t)u(b,t)=g(t).$$

- $\frac{\partial u}{\partial n}$ - derivace podle vnější normály,
- *smíšený okrajový problém* - na různých částech hranice $\partial\Omega$ jsou zadané různé tyoy okrajových podmínek.

Homogenní lineární rovnice v prostoru vyšší dimenze:
- derivace ve směru, charakteristický systém, rozšíření existeční věty.

Kvazilineární rovnice. (odvození)

Rovnice 2. řádu v rovině:

$$\begin{aligned} u_{tt}=f(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt}) \\ u(x,t_0)=u_0(x) \\ u_t(x,t_0)=u_1(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Lineární rovnice 2. řádu: $\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j \frac{\partial u}{\partial y_j} + \alpha u = f(y)$

Věta Cauchy-Kowalevskej: Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}$ a $\Gamma = \{(x,0) \in \Omega\}$, $(t_0 = 0)$. Nechť všechna data úlohy (f, u_0, u_1) jsou analitické v okolí Γ. Potom existuje řešení rovnice v okolí Γ. Toto řešení je jediné a analytické.

Definice: Říkáme, že funkce f je *analytická* v bodě (x_0, t_0), když je definovaná na nějakém okolí 0 bodu (x_0, t_0), v tomto okolí má derivace všech řádů a příslušný Taylorův polynom konverguje v okolí 0 k funkci f. (silná i slabá)

- lineární rovnice 2.řádu: $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$.

Zevšeobecnění Cauchyho úlohy pro rovnice k-tého řádu:

- lineární rovnice: $\frac{\partial^k}{\partial x_n^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u + f$.
- Počáteční podmínka:

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = u_j(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

6 Eliptické rovnice

(Laplaceova rovnice, harmonické funkce)

- odvození rovnice v kánonickém tvaru

Všeobecný tvar:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f,$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a $A = (a_{ij})_1^n$ je matice, jejíž všechny vlastní čísla mají stejné znaménko.

- u eliptických rovnic řešení nezávisí na čase - nejsou počáteční podmínky, jen okrajové

Laplaceova rovnice: $\Delta u = 0$, kde $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}$. Na hlavní diagonále má matice A samé 1.

Poissonova rovnice: $\Delta u = f$.

Definice: Funkce $u \in C^2$, která splňuje $\Delta u = 0$ na ohraničené oblasti Ω, se nazývá *harmonická.*

Elementární řešení Laplaceovy rovnice:

- $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Hledáme řešení, které je symetrické.

1. a 2. Greenova identita.

7 Hyperbolické rovnice

(rovnice struny, smíšený problém, separace proměnných)

- odvození rovnice v kánonickém tvaru

Vlnová rovnice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \tag{5}$$

Speciálně pro $n = 1$ dostaneme *rovnici kmitání struny*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(Počáteční a okrajové podmínky:)

Řešením rovnice (1) v oblasti Ω rozumíme funkci $u(t, x_1, \ldots, x_n)$, která má na Ω spojité derivace 2.řádu a splňuje v Ω rovnici (1).

Cauchyho problémem pro (1) je úloha najít řešení u rovnice (1) pro $t > 0$, přičemž u a $\frac{\partial u}{\partial t}$ jsou spojitě prodloužitelné pro $t \to \phi$ k předepsaným funkcím

$$u(0, x_1, \ldots, x_n) = \phi_0(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(u, x_1, \ldots, x_n) = \phi_1(x_1, \ldots, x_n).$$

Fyzikální význam - struna délky l je upevněna na koncích (podmínky: $u(0,t) = u(l,t) = 0$), je vychýlena do polohy $\phi_0(x)$ a z této polohy je v čase $t = 0$ puštěna (v čase $t = 0$ má rychlost 0 - podmínka: $u_t(x, 0) = 0$).

Řešení $u(x, t)$ hledáme ve tvaru:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t),$$

kde každá z funkcí $u_n(x, t)$:

1. je roven $u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$,
2. vyhovuje rovnici struny,
3. splňuje počáteční a okrajové podmínky,
4. není identicky rovna 0.

Fyzikální vyznám.

- Fourierova metoda.

8 Parabolické rovnice

(Cauchyův problém pro rovnici vedení tepla, Fourierova metody pro smíšený problém)

- odvození rovnice v kánonickém tvaru

Rovnice vedení tepla v tyči: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$.

Okrajové a počáteční podmínky: V praxi máme tyč se dvěmi konci a, b, musíme dodat informace, co se děje na koncích tyče - chladíme je, zahříváme je nebo je izolujeme.
Okrajové podmínky v $x = b$:

1. Dirichletova podmínka: $u(b,t) = u_0(t)$.

   Fyzikálně - dobre tepelně vodivý kontakt tyče s tělesem s předepsanou teplotou a velkou kapacitou, aby výměna tepla mezi tyčí a tělesem tuto teplotu neovlivnila. Např. ponoření tyče do nádoby se směsí vody a ledu - $u_0 = 0°C$, nebo do vroucí vody - $u_0 = 100°C$.

2. Neumannova podmínka: $u_x(b,t) = g(t)$ - předepisuje hodnotu tepelného toku.

   $(w(b,t) = -kg(t))$ - tepelný to je záporný, protože teplo do tyče vstupuje. Když je $g(t) > 0$ je konec tyče ohřívaný tepelným výkonem $kg(t)$.

3. Newtonova podmínka: $u_x(b,t) = -k_0(u(b,t) - u_b(t))$ nebo $u_x(b,t) + \mu(t)u(b,t) = g(t)$.

   Tepelný tok závisí na teplotě. Konec tyče s teplotou $u(b,t)$ (teplota tyče) je ve volném prostředí s předepsanou teplotou $u_b(t)$ (teplota okolí). Když je $u(b,t) > u_b(t)$, tak teplo vytéká z tyče ven.

Dohromady $\alpha u_x(b,t) + \beta u(b,t) = g(t)$, kde
- $\alpha = 0, \beta = 1$ - D.
- $\alpha = 1, \beta = 0$ - Neu.
- $\alpha = 1, \beta > 0$ - New.

Podobně pro druhý konec tyče: $-\alpha u_x(b,t) + \beta u(b,t) = g(t)$ - pozor na znaménko, ven je opačným směrem.

Počáteční podmínky:

$$u(x, t_0) = u_0(x) \quad x \in (a,b)$$

Rozložení tepla na začátku, když začínáme děj modelovat.

Fourierova metoda.