Algebraické struktury a topologie

Alexandra Olivová

Květen 2020

1 Multilineární algebra

(vektorové prostory, duální prostor, lineární a bilineární formy, tenzory)

Definice: *Vektorový prostor nad polem* P je množina V spolu s

1. binární operací $V \times V \to V, (a, b) \mapsto a + b$ - sčítaní,
2. vybraným prvkem $0 \in V$ - nula
3. zobrazení $V \to V, a \mapsto -a$ - opačný prvek
4. zobrazením $P \times V \to V, (p, a) \mapsto p \cdot a$ - násobení skalárem.

Přitom je požadováno, aby pro libovolné prvky $a, b, c \in V$ a $p, q \in P$ platilo:

- $a + b = b + a$,
- $a + (b + c) = (a + b) + c$,
- $a + 0 = a$,
- $a + (-a) = 0$,
- $1 \cdot a = a$,
- $p \cdot (q \cdot a) = (p \cdot q) \cdot a$,
- $(p + q) \cdot a = pa + qa$,
- $p \cdot (a + b) = pa + pb$.

- Prvky množiny V se nazývají vektory a prvky množiny P se nazývají skaláry.

Reálný a komplexní vektorové prostory - nad polem $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$.

Příklady:

Definice: (str.75)

1. Lineární kombinace:

2. Množina generátorů:

3. Konečně rozměrný vektorový prostor.

Definice: Řekněmě, že vektory $e_1, \dots, e_n \in V$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže z rovnosti

$$x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = 0, \quad x_1, \dots, x_n \in P,$$

plyne $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Vektory jsou *lineárně závislé*, jestliže nejsou lineárně nezávislé.

- Báze vektorového prostoru je libovolná n-tice jeho lineárné nezávislých generátorů.

Definice: *Dimenze* vektorového prostorů V je počet vektorů jeho libovolné báze.

Definice: Nechť U, V jsou vektorové prostory. Zobrazení $f : U \to V$ se nazývá *lineární*, jestliže platí

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$,
2. $f(ra) = rf(a)$

pro každé dva vektory $a, b \in U$ a každý skalár $r \in P$.
Jiný název pro lineární zobrazení je *homomorfismus vektorových prostorů*.

Příklady:

Věta: Nechť $f : U \to V, g : V \to W$ jsou homomorfismy. Potom $g \circ f : U \to W$ je také homomorfismus.

Definice: Nechť $f : U \to V$ je homomorfismus. Označme

1. $Kerf = \{u \in U | f(u) = 0\}$ - jádro homomorfismu f,
2. $Imf = fU = \{f(U) | u \in U\}$ - obraz homomorfismu f.

Definice: *Izomorfismus* vektorových prostorů je bijektivní lineární zobrazení.
- Vektorové prostory jsou izomorfní, jestliže mezi nimi existuje izomorfismus.

- matice lineárního zobrazení, matice přechodu.

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$. *Bilineární forma* na V je zobrazení $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, splňující pro libovolnou trojici vektorů $u, v, w \in V$ a libovolný skalár $a \in \mathbb{R}$

1. $\beta(u + v, w) = \beta(u, w) + \beta(v, w) \qquad \beta(au, w) = a\beta(u, w)$ - linearita v prvním argumentu,
2. $\beta(u, v + w) = \beta(u, v) + \beta(u, w) \qquad \beta(u, aw) = a\beta(u, w)$ - linearita v druhém argumentu.

Příklady:

- Každý euklidovský skalární součin je bilineární forma.
-

- Bilineární forma, která splňuje $\beta(u,v) = \beta(v,u)$ se nazývá *symetrická.*

Definice: Nechť $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ je symetrická bilineární forma. Zobrazení $\overline{\beta} : V \to \mathbb{R}$ zadané předpisem $\overline{\beta}(v) = \beta(v,v)$ se nazývá kvadratická forma příslušná symetrické bilineární formě β.

- Bilineární forma β se nazývá *polarizace* kvadratické formy $\overline{\beta}$.

Symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru V se nazývá *kladně definitní*, je-li každý vektor $v \in V \setminus \{0\}$ kladný, tedy $\beta(v,v) > 0$.

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Nechť p je přirozené číslo, označme $V^p = V \times \cdots \times V$. Zobrazení $f : V^P \to \mathbb{R}$ spňující pro libovolné vektory $u_i, u_i', u_i'' \in V$, libovolný skalár $a \in \mathbb{R}$ a každý index $i = 1, \dots, p$ následující podmínky:

1. $f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i' + u_i'', u_{i+1}, \dots, u_p) = f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i'', u_{i+1}, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i'', u_{i+1}, \dots, u_p)$,
2. $f(u_1, \dots, u_{i-1}, au_i, u_{i+1}, \dots, u_p) = af(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_p)$

se nazývá p-lineární forma nebo *kovariantní tenzor řádu p.*

- Prostor všech p-lineárních forem (tenzorů řádu p) se značí T_pV. Prostor T_1V se značí V^* a nazývá se duální prostor.

2 Grupy

(grupy, podgrupy, rozklad podle podgrupy, Lagrangeova věta, normální podgrupy a kongruence grupy)

3 Akce grup

(akce grupy, efektivní a tranzitivní akce, orbita akce, stabilizátor, Burnsideova věta)

4 Okruhy a moduly

(okruhy, podokruhy, ideály a faktorové okruhy, okruhy zbytkových tříd)

5 Topologická struktura na množině

(otevřené a uzavřené množiny, vnitřek, vnějšek, hranice, báze topologie)

Definice: Nechť $x \neq 0$ je množina (neprázdná) a τ je systém jejich podmnožin, ve kterém jsou splněny axiomy:

1. $\emptyset \in \tau$, $x \in \tau$,
2. $A, B \in \tau \to A \cap B \in \tau$,
3. Sjednocení libovolného podsystému množin patří do τ.

Potom se τ nazývá topologii na X a (X, τ) se nazývá topologický prostor.

Množiny z τ se nazývají otevřené množiny. Množina se nazývá uzavřená, když je její doplněk otevřená množina.

Definice: A je uzavřená množina když $X \setminus A$ je otevřená množina.
- V každé topologii je prázdná množina a celá množina X uzavřená i otevřená.

Příklady:

Věta: (o uzavřených množinách)

1. $\emptyset, X \in \tau$ (uzavřená),
2. $A, B \in \tau$(uzavřená) $\to A \cap B \in \tau$ (uzavřená),
3. $A_i \in \tau$(uzavřená), $i \in I \to \cup A_i \in \tau$(uzavřená).

Definice: Nechť je (X, τ) topologický prostor. Množinu B (množina otevřených podmnožin X) nazveme bází topologie τ, když každá otevřená množina v τ je sjednocením množin z B.

Lokální bází topologie τ v bodě $x \in X$ rozumíme systém B_x okolí bodu x takové, že pro každé $U \in Nb_x$ existuje prvek $V \in B_x$ takový, že $V \subset U$.

Bází topologie τ rozumíme podsystém B systému τ takový, že každá neprázdná množina $M \in \tau$ je sjednocením nějakých množin z τ.

Systém generátorů topologie τ rozumíme podsystém B systému τ.

Axiomy báze
(P) $\cup B = X$ (sjednocení množin z báze pokryjí celé X),
(B) Pro každé $B_1, B_2 \in B, B_1 \cap B_2$ je sjednocení množin z báze.

Věta:$B \subset 2^x$ je bází nejaké topologie právě tehdy, když platí (P) a (B).

Definice: X je množina, P je předbáze, $P \subset 2^x$. Existuje taková topologie τ, že $P \subset \tau$, že ta topologie je diskrétní. P je předbáze takové topologie.

Věta: Když je P pokrytí X, pak B je báze nejhrubší topologie na X, která obsahuje P.

Definice: Máme prostor X, $A \subset X, x \in A$ a topologie. A nazýváme okolím bodu x právě tehdy, když existuje B $\subset \tau$ tak, že $x \in B \subset A$.

- Poznámka: Okolí bodu nemusí být pouze otevřená množina. B stačí hledat mezi bázovými množinami.

Definice: Vnitřek množiny A - $intA = \cup\{B \subset X, B \subset A, B \in \tau\}$.

Definice: Uzávěr množiny A - $\overline{A} = \cap\{B \subset X, A \subset B\}$, kde B je uzavřená množina.

Věta:

1. Vnitřek množiny A je největší otevřená množina ležící v A.
2. Uzávěr množiny A je nejmenší uzavřená množina obsahující A.

Věta:

1. Množina A je otevřená právě tehdy, když $intA = A$.
2. Množina A je uzavřená právě tehdy, když $\overline{A} = A$.

Definice: Hranice množiny A - $\partial_A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ je uzavřená množina.

Definice: Bod x se nazývá vnitřní (uzávěrový, hraniční) bod množiny A, když $x \in intA(\overline{A}, \partial_A)$.

6 Spojitá zobrazení, homeomorfizmy

Definice: Nechť X, Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá *spojité v bodě* $x \in X$, když existuje pro každé $U \in Nb_{f(x)}$, $V \in Nb_X$ takové, že $f(V) \subset U$.

- Zobrazení se nazývá *spojité*, když je spojité v každém bodě.

Zobrazení $f(x)$ je spojité v bodě a, pokud:

1. je v bodě a definované,
2. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí $\sigma(a)$ bodu a tak, že pro každé $x \in \sigma(a)$ platí: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Příklady:

1. Každé zobrazení diskrétního topologického prostoru do libovolného topologického prostoru je spojité.
2. Každé zobrazení libovolného topologického prostoru do triviálního topologického prostoru je spojité.
3. Množina $\mathbb{R}$ reálných čísel s přirozenou topologií - nespojitá.
4. Dirichletova funkce je nespojitá.

Věta: Nechť f je zobrazení z topologického prostoru (X, τ) do prostroru (Y, τ'). Potom f je spojité právě tehdy, když pro každé $x \in X$ a pro každé $U \in \tau'$, kde $f(x) \in U$, existuje $V \in \tau$ takové, že $f(V) \subset U$.

Věta: Zobrazení $f : X \to Y$, pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. f je spojité zobrazení.
2. Pro každé $A \subset X$ platí, že $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
3. Vzor každé uzavřené množiny je uzavřená množina.
4. Vzor každé otevřené množiny je otevřená množina.
5. Existuje předbáze P na Y taková, že vzor každého jejího prvku je otevřená v X. (Vzor libovolné otevřené množiny patří do systému generátorů topologie Y je otevřená množina v X.)

Věta: Nechť $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ jsou zobrazení. Když f je spojité v bodě $x \in X$ a g je spojité v bodě $f(x) \in Y$, pak $g \circ f : X \to Z$ je spojité v bodě $x \in X$.

Definice: Zobrazení $f : X \to Y$ je *homeomorfismus* právě tehdy, když zobrezení f je spojité a bijektivní a inverzní zobrazení $f^{-1} : Y \to X$ je spojité.

- Topologické prostory jsou homeomorfní, existuje-li homeomorfismus $f : X \to Y$.

Věta: K tomu aby bijekce topologického prostoru byla homeomorfismus, je nutné a stačí, aby byla spojitá a otevřená.

- Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá *otevřené*, je-li obraz $f(U)$ libovolné otevřené množiny $U \subset X$ otevřená množina.

Definice: Zobrazení $f : Y \to X$ je vložení, když jeho stopa na Y je homeomorfismus.
(Zobrazení f je vložení, když platí, že f je injektivní a spojité a pro každé otevřené A z Y, existuje A' z X otevřené, tak že $f(A) = A' \cap f(Y)$.

- Každý homeomorfismus je vložení.

Definice: Prostor X se nazývá *Hausdorfovský*, když pro každé $x, y \in X$, kde $x \neq y$, existuje okolí bodu x a okolí bodu y takové, že jejich průnik je prázdná množina.

Věta: Prostory X, Y a Y je Hausdorfův. Zobrazení $f, g : X \to Y$ jsou spojité. Potom množina taková, že $x \in X$ tak, že $f(x) = g(x)$ je uzavřená.

7 Metrické prostory

(metrika, metrická topologie, úplné metrické prostory, kontrakce, věta o pevném bodě, Hausdorffova věta o zúplnění metrického prostoru)

Definice: *Metrikou* na neprázdné množině X rozumíme funkci $d : X \times X \to \mathbb{R}$ takovou, že pro každé $x, y, z \in X$ platí:

1. $d(x, y) > 0$ pro libovolné $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

- Množina X s danou metrikou (X, d) se nazývá *metrický prostor*.
- $d(x, y)$ - vzdálenost 2 bodů,
- vzdálenost množin: $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B}\{d(x, y)\}$.

Topologie na metrickém prostoru X generována systémem všech otevřených koulí se nazývá *metrická topologie*.

- otevřená koule se středem $x \in X$ a poloměrem $r > 0$ je množina $B_d(x, r) = \{y \in Y | d(x, y) < r\}$,
- uzavřená koule: $\overline{B_d}(x, r) = \{y \in X | d(x, y) \leq r\}$.

Věta: Nechť (X, d) je metrický prostor. Označme τ_d systém všech podmnožin $A \subset X$ takových, že ke každému bodu $a \in A$ existuje otevřená koule $B(a, r)$, kde $r > 0$ leží v množině A. Potom uspořádaná dvojice (X, τ_d) je topologický prostor, tedy systém τ_d je topologie na X.
(Topologický prostor generovaný metrickým prostorem.)

Topologie τ_d z věty se nazývá *metrická topologie* na X generovaná metrikou d.

- Topologický prostor s metrickou topologií je *Hausdorfův*.

Definice: Metrický prostor se nazývá *úplný*, pokud každá Cauchyovská posloupnost v prostoru X je konvergentní.

- Posloupnost $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ metrického prostoru X s metrikou d se nazývá *Cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existují index n_0 takový, že pro každé $i, j \geq n_0$ platí $d(x_i, x_j) < \varepsilon$.

Věta: Každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská.

Věta:

1. Úplný podprostor metrického prostoru je uzavřená množina.
2. Uzavřená množina v úplném metrickém prostoru je úplný podprostor.

Věta: Podprostor A úplného metrického prostoru je úplný právě tehdy, když A je uzavřená množina.

Definice: Zobrazení $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ je *stejnoměrně spojité* právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$: pro každé $x, y \in X$ platí, že $d_1(x, y) < \delta \to d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Poznámka: - je-li f stejnoměrně spojité, pak je spojité (opačně neplatí) - implikace se může obrátit pouze v kompaktním prostoru.

Věta: Nechť X je metrický prostor s metrikou d, $A \subset X$ neprázdná množina. Zobrazení $x \to d(x, A) \in \mathbb{R}$ je stejnoměrné spojité.

Věta: Zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ jsou 2 rovnoměrně spojité zobrazení. $(X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3)$ jsou metrické prostory. Pak $g \circ f : X \to Z$ je také stejnoměrně spojité zobrazení.

Definice: Nechť $(X, d_1), (Y, d_2)$ jsou 2 metrické prostory. Zobrazení $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ se nazývá *kontrakce* právě tehdy, když existuje k takové, že $k \in (0; 1)$ tak, že pro každé $x, y \in X$ platí $d_2(f(x), f(y)) < k * d_1(x, y)$.

- Kontrakce je stejnoměrně spojité zobrazení.

Bod $x \in X$, pro který platí, že $f(x) = x$ se nazývá *pevný bod.* kontrakce f.

Věta (o pevném bodě): Nechť X je úplný metrický prostor a $f : X \to X$ je kontrakce. Potom existuje právě jeden bod $x \in X$ takový, že $f(x) = x$.

- Každá kontrakce v úplném metrickém prostoru má právě jeden pevný bod.

Definice: Nechť $(X, d_1)(Y, d_2)$ jsou metrické prostory a $f : X \to Y$ se nazývá *izometrie* právě tehdy, když $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$ pro každé $x, y \in X$.

- Prostory X, Y se nazývají izometrické, jestliže existuje izometrie $f : X \to Y$.

Izometrie f metrického prostoru X_1 do úplného metrického prostoru X_2 taková, že $f(X_1) \subset X_2$ je hustá množina, se nazývá *zúplnění metrického prostoru* X_1.

Hausdorffova věta o zúplnění metrického prostoru: Každý metrický prostor je izometrický s podprostorem úplného metrického prostoru.

Věta: Ke každému metrickému prostoru existuje jeho zúplnění.