Extremalní úloha

Pavel Holba

Prosinec 2020

Příklad 1. Najděte kladná reálná čísla a, b tak, aby body $A[a, 0], B[0, b]$ a $C[2, 4]$ ležely na jedné přímce a aby vzdálenost bodů A a B byla minimální. Vypočtěte tuto vzdálenost.

Řešení:
Vyjádříme vzdálenost bodů A a B,

$$|AB| = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1}$$

Potřebujeme převést (1) na funkci jedné proměnné, na to využijeme informaci, že body A, B, C leží na jedné přímce. Směrový vektor přímky AB je $\vec{u}_{AB} = (a, -b)$, tudíž normálový vektor je $\vec{n}_{AB} = (b, a)$. Rovnice přímky AB je tedy ve tvaru $bx + ay + q = 0$, kde $q \in \mathbb{R}$. Pro výpočet q dosaďme do rovnice přímky např. bod A.

$$\begin{aligned} ba + a \cdot 0 + q &= 0 \\ q &= -ab \end{aligned}$$

Rovnice naši přímky je tedy $bx + ay - ab = 0$. Protože i bod C leží na této přímce, platí

$$2b + 4a - ab = 0 \tag{2}$$
$$b(2-a) = -4a \tag{3}$$
$$b = \frac{4a}{a-2}, \quad a \neq 2 \tag{4}$$

Předpokládejme, že $a = 2$, pak z (2) plyne, že $2b + 4 \cdot 2 - 2b = 8 \neq 0$, situace $a = 2$ tedy nemůže nastat. Dosadíme-li (4) do (1), dostaneme vzdálenost bodů A, B vyjádřenou jako funkci jedné proměnné:

$$\begin{aligned} |AB|(a) &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{4a}{a-2}\right)^2} = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{16}{(a-2)^2}\right)} = |a|\sqrt{\frac{a^2 - 4a + 20}{(a-2)^2}} = \\ &= \frac{|a|}{|a-2|}\sqrt{a^2 - 4a + 20} \end{aligned} \tag{5}$$

Pokud $0 < a < 2$, pak z (5) plyne

$$|AB|(a) = \frac{a}{2-a}\sqrt{a^2 - 4a + 20} \tag{6}$$

První derivace (6) je tedy

$$\begin{aligned} |AB|'(a) &= \frac{(2-a) - a(-1)}{(2-a)^2}\sqrt{a^2 - 4a + 20} + \frac{a}{2-a} \cdot \frac{2a-4}{2\sqrt{a^2 - 4a + 20}} = \\ &= \frac{2}{(2-a)^2}\sqrt{a^2 - 4a + 20} - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 4a + 20}} \end{aligned} \tag{7}$$

Položme (7) rovno nule abychom našli body podezřelé z extrému:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{(2-a)^2}\sqrt{a^2-4a+20}-\frac{a}{\sqrt{a^2-4a+20}}&=0 \qquad \Big|\cdot\sqrt{a^2-4a+20}>0\\
\frac{2a^2-8a+40}{(2-a)^2}-a&=0\\
\frac{2a^2-8a+40-a(4-4a+a^2)}{(2-a)^2}&=0\\
2a^2-8a+40-4a+4a^2-a^3&=0\\
-a^3+6a^2-12a+40&=0\\
a^3-6a^2+12a-8-32&=0\\
(a-2)^3-32&=0\\
(a-2-2\sqrt[3]{4})\left[(a-2)^2+2\sqrt[3]{4}(a-2)+8\sqrt[3]{2}\right]&=0.
\end{aligned}
$$

Protože kvadratický polynom v druhé závorce nemá reálné kořeny (ověřte, že $D<0$), dostáváme pouze jedno řešení $a_0=2+2\sqrt[3]{4}$. Předpoklad ovšem byl, že $0<a<2$, což náš kořen a_0 očividně nesplňuje.
Pokud $a<0 \vee a>2$, pak z (5) plyne

$$
|AB|(a)=\frac{a}{a-2}\sqrt{a^2-4a+20} \tag{8}
$$

První derivace (8) je tedy

$$
\begin{aligned}
|AB|'(a)&=\frac{(a-2)-a}{(a-2)^2}\sqrt{a^2-4a+20}+\frac{a}{a-2}\cdot\frac{2a-4}{2\sqrt{a^2-4a+20}}=\\
&=\frac{-2}{(a-2)^2}\sqrt{a^2-4a+20}+\frac{a}{\sqrt{a^2-4a+20}}
\end{aligned} \tag{9}
$$

Vidíme, že derivace (9) je stejná jako (7) až na znaménko, což při položení rovno nule nehraje žádnou roli. Dostáváme tedy stejný kořen $a_0=2+2\sqrt[3]{4}$. Jelikož nemáme žádné jiné body podezřelé z extrému, je a_0 náš hledaný extrém. Z (4) můžeme spočítat číslo b:

$$
b=\frac{4a}{a-2}=\frac{8+8\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{4}}=\frac{4+4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{16}}=\frac{4\sqrt[3]{16}+4\cdot 4}{4}=2\sqrt[3]{2}+4.
$$

Vzdálenost bodů A, B je pak

$$
\begin{aligned}
|AB|&=\sqrt{(2+2\sqrt[3]{4})^2+(2\sqrt[3]{2}+4)^2}=\sqrt{4+8\sqrt[3]{4}+8\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}+16\sqrt[3]{2}+16}=\sqrt{20+24\sqrt[3]{2}+12\sqrt[3]{4}}=\\
&=2\sqrt{5+6\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}}.
\end{aligned}
$$

Hledané čísla jsou tedy $a=2+2\sqrt[3]{4}$ a $b=2\sqrt[3]{2}+4$, pak je $|AB|=2\sqrt{5+6\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}}$ minimální.