Důkaz pomocí neurčitého prvku

Pavel Holba

Říjen 2021

Příklad 1. Dokažte následující rovnost dvou množin pomocí neurčitého prvku:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Řešení: Není třeba dělit na „$\subset$“ a „$\supset$“, protože všude můžeme psát ekvivalence (proč?):

$$x \in (A \cap (B \cup C)) \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \in (B \cup C) \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \overset{(15)}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{(15)}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \overset{def}{\Leftrightarrow} (x \in (A \cap B)) \vee (x \in (A \cap C)) \overset{def}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{def}{\Leftrightarrow} x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C)).$$

$\square$

Příklad 2. Rozhodněte, v jakém vztahu ($=$, $\subset$ nebo $\supset$) jsou množiny $(A \setminus B) \cup C$ a $(A \cup C) \setminus B$ a své tvrzení dokažte.

Řešení:
„$\subset$“:

$$x \in L \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in (A \setminus B) \vee x \in C \overset{def}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in C \overset{(14)}{\Leftrightarrow} (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \notin B \vee x \in C)$$

„$\supset$“:

$$x \in P \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in (A \cup C) \wedge x \notin B \overset{def}{\Leftrightarrow} (x \in A \vee x \in C) \wedge x \notin B \overset{(*)}{\Rightarrow} (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \notin B \vee x \in C)$$

kde $(*)$ je tautologie $p \wedge q \Rightarrow p \wedge (q \vee r)$ (ověřit). Došli jsme tedy k tomu, že $x \in P \Rightarrow x \in L$, tedy $[(A \setminus B) \cup C] \supset [(A \cup C) \setminus B]$.
Abychom ukázali, že $L \not\subset P$, stačí najít libovolný protipříklad, buď tedy $A = \{1; 2\}, B = \{3; 4\}$ a $C = \{3; 5\}$. Pak $(A \setminus B) \cup C = \{1; 2; 3; 5\}$ a $(A \cup C) \setminus B = \{1; 2; 5\}$ a očividně $\{1; 2; 3; 5\} \not\subset \{1; 2; 5\}$.
$\square$

Příklad 3. Dokažte následující rovnost dvou množin pomocí neurčitého prvku:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Řešení: Není třeba dělit na „$\subset$“ a „$\supset$“, protože všude můžeme psát ekvivalence (proč?):

$$x \in [A \cap (B \cap C)] \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \in (B \cap C) \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \overset{(11)}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{(11)}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C) \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in (A \cap B) \wedge x \in C \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in [(A \cap B) \cap C].$$

$\square$

Příklad 4. Rozhodněte, v jakém vztahu jsou množiny $A \setminus (B \cup C)$ a $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ a své tvrzení dokažte pomocí neurčitého prvku.

Řešení:
„=“:

$$x \in L \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge \neg x \in (B \cup C) \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \overset{(6)}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \overset{(11),(2),(*)}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{(11),(2),(*)}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in (A \setminus B) \wedge x \in (A \setminus C) \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in P.$$

kde $(*)$ je tautologie $p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge p \wedge q$ (ověřit). Došli jsme tedy k tomu, že $x \in P \Leftrightarrow x \in L$, tedy $[(A \setminus B) \cup C] = [(A \cup C) \setminus B]$.

$\square$

KVANTIFIKÁTORY

Obecný kvantifikátor: ∀ „každý"; „pro všechna"; „pro každé"
v záporné větě: „žádný"; „nikdo"

Existenční kvantifikátor: ∃ „existuje nějaké"; „existuje alespoň jedno"
∃! „existuje právě jedno"

Při negaci kvantifikovaných výroků se obecný kvantifikátor mění na existenční a naopak.

ν	$\neg\nu$
∀(x∈M): A(x)	∃(x∈M): ¬A(x)
∃(x∈M): A(x)	∀(x∈M): ¬A(x)
Všichni jsou……..	Někteří nejsou………. Alespoň jeden není…..
Někteří jsou…………. Alespoň jeden je……….	Žádní nejsou………
Aspoň n prvků je….	Nejvýše n-1 prvků je……..
Nejvýše n prvků je…….	Alespoň n+1 prvků je…..
Právě n prvků je……..	Nejvýše n-1 prvků nebo alespoň n+1 prvků….

Důležité tautologie

Tyto tautologie budeme často používat, je proto dobré se je naučit zpaměti.

$$p \Leftrightarrow \neg(\neg p) \tag{1}$$
$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p) \tag{2}$$
$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p) \tag{3}$$
$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p) \tag{4}$$
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \tag{5}$$
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \tag{6}$$
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \tag{7}$$
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \tag{8}$$
$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \tag{9}$$
$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \tag{10}$$
$$((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)) \tag{11}$$
$$((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r)) \tag{12}$$
$$((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)) \tag{13}$$
$$((p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r)) \tag{14}$$
$$((p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \tag{15}$$
$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \tag{16}$$

Tautologie (2-4) jsou komutativity, tautologie (5-6) jsou DeMorganovy zákony, tautologie (8) je obměněná implikace, tautologie (11-13) jsou asociativity, tautologie (14-15) jsou distributivity a tautologie 16 je tranzitivita.