

Matematická analýza I

Zkoušková písemka

Příklad 1. Dokažte, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : 5 \mid 2^{4n+3} - 3. \quad (12b.)$$

Příklad 2. Vypočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 2}. \quad (12b.)$$

Příklad 3. Vypočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}. \quad (16b.)$$

Příklad 4. Na plotě vysokém $1m$ sedí vrabec. Ve vzdálenosti $15m$ od plotu roste strom s větví ve výšce $3m$. Zem mezi plotem a stromem je hustě poseta žízalami. V jaké vzdálenosti od plotu má vrabec sezobnout žízalu, aby proletěl trasu plot-žížala-větev po přímočarých trajektoriích po co nejkratší dráze?

(20b.)

Příklad 5. Vyšetřete průběh funkce f a načrtněte její graf:

$$f : y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1} \quad (40b.)$$