

Matematická analýza I

Zkoušková písemka - varianta C

Příklad 1. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(10b.)

Příklad 2. Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{-3n+1}.$$

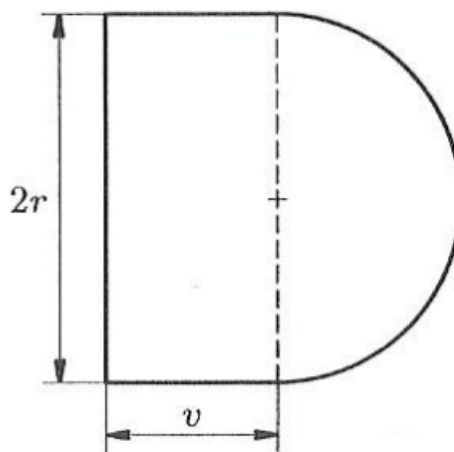
(15b.)

Příklad 3. Najděte body nespojitosti funkce f a určete jejich typ. Pokud je to možné, dodefinujte funkci tak, aby byla v těchto bodech spojitá:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}.$$

(15b.)

Příklad 4. Půdorys divadelního jeviště je sjednocením obdélníku a kruhu (viz. Obrázek 1). Obvod půdorysu jeviště je 40 m. Určete rozměry půdorysu r a v v metrech, víte-li, že byly stanoveny tak, aby obsah půdorysu jeviště byl největší. (20b.)



Obrázek 1

Příklad 5. Vyšetřete průběh funkce f a načrtněte její graf:

$$f : y = \ln \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$$

(40b.)