1. Mocninné řady v komplexní rovině

Definice: Komplexními čísly $\mathbb{C}$ nazveme množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, s následujícími operacemi sčítání a násobení: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
Formálně zapisujeme $a + bi$. $i^2 = -1$

Definice: Reálná a imaginární část: $Re(a + bi) := a, Im(a + bi) := b$
Absolutní hodnota: $|a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}$
Komplexně sdružené číslo: $a \bar{+} bi := a - bi$
Goniometrický tvar komplexního čísla: $a + bi = r(cos\phi + sin\phi)$, kde $r = |a + bi|, \phi = arctg\frac{b}{a}$

Moivreova věta: Pro $z = r(cos\phi + isin\phi), w = R(cos\psi + isin\psi)$ platí:

$$z \cdot w = rR(cos(\phi + \psi) + isin(\phi + \psi))$$

Definice: Pro posloupnost komplexních čísel z_n platí:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |z_n - y| < \varepsilon$$

A podobně pro komplexní funkci:

$$\lim_{z \to z_0} = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - a| < \varepsilon$$

Definice: Funkce f definovaná v nějakém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ se nazývá holomorfní v z_0 pokud existuje limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Hodnota limity se značí $f'(z_0)$ a nazývá se derivací f v z_0

Věta: Cauchy-Riemannovy podmínky: Nechť f je holomorfní v $z_0 = x_0 + iy_0$ a $u(x, y) := Ref(x + iy), v(x, y) := Imf(x + iy)$. Pak existují parciální derivace u, v podle x, y v bodě (x_0, y_0) a v tomto bodě platí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

*důkaz? (vypadá důležitě)

Definice: Konvergence řady $\sum_{j=0}^{\infty} a_n$ komplexních čísel znamená, že konverguje posloupnost částečných součtů.
Bodová konvergence:

$$f_n(x) \to f(x) \forall x \Leftrightarrow \forall x \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Stejnoměrná konvergence:

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall x \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Věta: Weierstrassův M-test: Nechť $|f_n(x)| \leq b_n \forall n \forall x a \sum_n b_n < \infty$. Potom $\sum_n f_n(x)$ konverguje absolutně a stejnoměrně. *důkaz? (relativně krátký)

Definice: Mocninná řada je řada funkcí speciálního tvaru $f_n(x) = a_n x^n$. Tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde a_n jsou nějaká komplexní čísla.

Věta: Definujme R pomocí $\frac{1}{R} := \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ ($\frac{1}{0} := \infty, \frac{1}{\infty} := 0$). Potom pro každou mocninnou řadu $f(z) := \sum_n a_n z^n$ platí:

(i) řada konverguje absolutně a stejnoměrně na každém kruhu $|z| < R$ (POLOMĚR KONVERGENCE)

(ii) řada diverguje pro $|z| > R$

(iii) pro $|z| < R$ je součet $f(z)$ holomorfní funkcí a $f'(z)$ se dá spočítat derivováním člen po členu:

$$f'(z) = \sum_n n a_n z^{n-1}$$

Důsledek: Součet $f(z) = \sum_n a_n z^n$ mocninné řady má v kruhu konvergence dokonce derivace všech řádů a všechny můžeme spočítat derivováním člen po členu.

Příklady mocninných řad:

1. Geometrická řada $a_n = 1, R = 1$
   částečné součty: $s_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$
   $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-x} \forall x : |x| < 1$
   diverguje pro $|x| > 1$

2. Derivace geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}, R = 1$

3. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, R = 0$

4. Exponenciální funkce $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, R = \infty$
   $\frac{1}{R} = \lim\sup(\frac{1}{n!})^{\frac{1}{n}}$ a $(n!)^{\frac{1}{n}} \to \infty$