39. Topologická dynamika

Definice: Trajektorie bodu $x \in X$ je posloupnost $\gamma(x) = \{f^n(x)\}_{n \geq 0}$.

Definice: Definujeme limitní množinu bodu $x \in X$ jako množinu $\omega(x) = \omega(x, T) = \bigcap_{m \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq m} f^n(x)}$

Lemma: Pro libovolné $x \in X$ je limitní množina $\omega(x)$ neprázdná, uzavřená a silně invariantní.

Definice: Bod $x \in X$ je asymptoticky periodický, pokud existuje periodický bod $z \in X$ takový, že $d(f^n(x), f^n(z)) \to 0$ pro $n \to \infty$

Lemma: Limitní množina $\omega(x)$ obsahuje pouze konečně mnoho bodů právě tehdy, když je x asymptoticky periodický bod. Pokud $\omega(x)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů, tak žádný isolovaný bod $\omega(x)$ není periodický. (Důkaz? Block, str 72)

Definice: Nechť $\Lambda = \Lambda(f) = \bigcup_{x \in X} \omega(x)$ je množina všech limitních bodů všech trajektorií. Platí $f(\Lambda) = \Lambda$. Navíc pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí $\Lambda(f) = \Lambda(f^m)$.

Definice: Bod $x \in X$ je rekurentní, pokud $x \in \omega(x)$ nebo pokud $f^{n_k}(x) \to x$ pro nějakou posloupnost přirozených čísel $n_k \to \infty$.

Definice: Bod $x \in X$ je nebloudivý pokud každá otevřená množina obsahující x obsahuje aspoň dva body nějaké trajektorie nebo $f^{n_k}(x_k) \to x$ pro nějakou posloupnost bodů $x_k \to x$ a posloupnost přirozených čísel $n_k \to \infty$.

Definice: Nechť P je množina všech periodických bodů, R množina všech rekurentních bodů a Ω množina všech nebloudivých bodů.
Platí $P \subset R \subset \Lambda \subset f(\Omega) \subset \Omega = \overline{\Omega}$

Lemma: Nechť $f : I \to I$, J otevřený podinterval I, který neobsahuje žádný periodický bod f. Potom:

(i) J obsahuje nejvýše jeden bod libovolné limitní množiny $\omega(x)$

(ii) J neobsahuje žádný rekurentní bod

(iii) pokud $x \in J$ je rekurentní, pak žádný jiný bod jeho trajektorie neleží v J

Tvrzení: Množina nebloudivých bodů Ω je obsažena v uzávěru množiny eventuelně periodických bodů. (Důkaz? Block, pg 79)

Tvrzení: Pokud $x \in \Omega(f)$ a x není eventuelně periodický, potom $x \in \Omega(f^n)$ pro každé $n \geq 1$. (Důkaz? Block, pg 83)

Definice: Množina $M \subset X$ je minimální, pokud je neprázdná, uzavřená a invariantní a žádná její podmnožina nemá tyto tři vlastnosti. Ekvivalentně, neprázdná množina M je minimální, pokud $\overline{\gamma(x, f)} = M$ pro každé $x \in M$.

Příklad: Konečná množina je minimální právě tehdy, když je to periodická orbita.

Lemma: Neprázdná množina M je minimální právě tehdy, když $\omega(x, f) = M$ pro každé $x \in M$.

Důsledek: Minimální množina je silně invariantní.

Lemma: Každá neprázdná uzavřená invariantní množina F obsahuje minimální množinu. (Důkaz?, Block pg 92)

Lemma: Každá nekonečná minimální množina je Cantorova - uzavřená podmnožina intervalu, která neobsahuje žádné isolované body a žádný interval.

Definice: Bod $x \in X$ je silně rekurentní pokud pro každou otevřenou množinu U obsahující x existuje $N \in \mathbb{N} : N = N(U)$ takové, že $f^m(x) \in U$, kde $m \geq 0$, potom $f^{m+k}(x) \in U$ pro nějaké $k : 0 < k \leq N$.

Tvrzení: Pokud je M minimální množina, potom každý bod $x \in$ je silně rekurentní. Zároveň pokud je x silně rekurentní, tak uzávěr jeho orbity $\overline{\gamma(x)}$. (Důkaz, Block pg 93)

Definice: Nechť $f : A \to A$ a $g : B \to B$ dvě zobrazení. Řekneme, že f a g jsou topologicky konjugované, pokud existuje homeomorfismus $h : A \to B$ takový, že $h \circ f = g \circ h$. Homeomorfismus h se nazývá topologická konjugace.

Příklad: Logistická rovnice a Mandelbrotova množina: $Q_c \circ h = h \circ F_\mu$

$$Q_c(h(x)) = h(F_\mu(x))$$

$$Q_c(\alpha x + \beta) = h(\mu x(1 - x))$$

$$(\alpha x + \beta)^2 + c = \alpha \cdot (\mu x(1 - x)) + \beta$$

$$\alpha^2x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 + c = \alpha\mu x - \alpha\mu x^2 + \beta$$
$$x^2(\alpha^2 + \alpha\mu) + x(2\alpha\beta - \alpha\mu) + (\beta^2 + c - \beta) = 0$$
$$\begin{array}{ccc} \alpha^2 + \alpha\mu = 0 & \Rightarrow \alpha(\alpha + \mu) = 0 & \Rightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = -\mu \\ 2\alpha\beta - \alpha\mu = 0 & \Rightarrow \alpha(2\beta - \mu) = 0 & \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = \dfrac{\mu}{2} \\ \beta^2 + c - \beta = 0 & \Rightarrow \beta = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2} & \\ c < \dfrac{1}{4} \Rightarrow \exists\beta & \alpha, \beta \neq 0 & \\ \alpha = -\mu & \beta = \dfrac{\mu}{2} & \end{array}$$
$$h(x) = -\mu x + \frac{\mu}{2}$$

Definice: Zobrazení $f : J \to J$ je topologicky transitivní, pokud pro libovolné otevřené množiny $U, V \subset J$ existuje $k > 0$ takové, že $f^k(u) \cap V \neq \emptyset$

Lemma: Pokud je $f : X \to X$ spojité zobrazení, potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) f je transitivní

(ii) pro každou neprázdnou množinu $W \in X$ je $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(W)$ je hustá v X.

(iii) pro každou dvojici neprázdných otevřených množin U, V v X existuje kladné přirozené číslo k takové, že $f^{-k}(U) \cap V \neq \emptyset$

(iv) pro každou neprázdnou množinu $W \in X$ je $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(W)$ je hustá v X.

(v) každá vlastní uzavřená invariantní podmnožina X má prázdný vnitřek.

(Důkaz? Block pg 155)

Lemma: Pokud je f transitivní, platí $f(X) = X$ a $\Omega(f) = X$.

Tvrzení: Spojité zobrazení kompaktního metrického prostoru na sebe je transitivní právě tehdy, když existuje bod $x \in X$ takový, že $\omega(x, f) = X$.

Důsledek: Zobrazení shift je transitivní. (Důkaz? Block pg 156)

Tvrzení: Nechť $f : I \to I$ je transitivní a nechť $x \in I$ je takový, že $\omega(x, f) = I$. Potom platí jedna z těchto alternativ:

(i) $\omega(x, f^s) = I$ pro každé $s \in \mathbb{N}$

(ii) existují nedegenerované intervaly J, K takové, že $J \cup K = I$ a $J \cap K = y$, kde y je pevný bod f. Platí $f(J) = K, f(K) = J$.

Důsledek: Nechť f je spojité zobrazení takové, že f^2 je transitivní. Potom f^s je transitivní pro každé $s \in \mathbb{N}$.

Tvrzení: Nechť f je spojité zobrazení. Potom f^2 je transitivní právě tehdy, když pro každý otevřený podinterval J a každý uzavřený podinterval H, který neobsahuje koncový bod I, existuje positivní přirozené číslo N takové, že $H \subset f^n(J)$ pro každé $n > N$.

Věta: Pro libovolné spojité zobrazení $f : I \to I$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) f je transitivní a má periodický bod liché periody větší než 1

(ii) f^2 je transitivní

(iii) f je topologicky mixující

Lemma: Pro libovolný interval $I = [a, b]$ existuje spojité zobrazení $f : I \to I$ takové, že $f(a) = a$, $f(b) = b$ a f je topologicky mixující.

Definice: Řekneme, že f je slabě mixující, pokud je f^2 transitivní.