32. Kompaktní a lokálně kompaktní prostory

1 Kompaktní prostory

Definice: Topologický prostor X je kompaktní pokud každé jeho otevřené pokrytí má konečné podpokrytí.

Věta: Topologický podprostor Y topologického prostoru X je kompaktní právě tehdy, když každé jeho pokrytí množinami otevřenými v X obsahuje konečné podpokrytí.

Důkaz:

$\Rightarrow$ $Y \subset X$ je kompaktní
Nechť $(U_i)_{i \in I}$ je pokrytí Y množinami otevřenými v X. Potom $(V_i)_{i \in I}$, $V_i = U_i \cap Y$ je otevřené pokrytí X a z kompaktnosti vím, že existuje konečná množina $J \subset I$ taková, že $\bigcup_{i \in J} V_i = Y$. Evidentně $Y \subset \bigcup_{i \in J} U_i$

$\Leftarrow$ Předpokládáme, že každé pokrytí Y množinami otevřenými v X, obsahuje konečné podpokrytí.
Nechť $\bigcup_{i \in I} V_i$ je libovolné otevřené pokrytí Y. $\forall i \in I \ \exists U_i$ otevřené v X takové, že $V_i = U_i \cap Y$ (z indukované topologie).
Evidentně $Y = \bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Z předpokladu existuje konečná množina $J \subset I$ taková, že $\bigcup_{i \in J} \supset Y$. Potom $\bigcup_{i \in J} V_i = \bigcup_{i \in J} (U_i \cap Y) = \bigcup_{i \in J} U_i \cap Y = Y$, tedy Y je kompaktní.

Věta:

(a) Sjednocení dvou kompaktních množin je kompaktní množina.

(b) Pokud A je kompaktní a U otevřená, tak $A - U$ je kompaktní.

(c) Nechť $A \subset B$ a $\bar{B}$ je kompaktní. Potom i $\bar{A}$ je kompaktní.

(d) Průnik libovolného systému kompaktních uzavřených množin je kompaktní uzavřená množina.

Důkaz:

(a) Nechť $(U_i)_{i\in I}$ je otevřené pokrytí $A \cup B$. A a B jsou kompaktní $\Rightarrow$ $\exists J, K \subset I : A \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i, B \subset \bigcup\limits_{i\in K} U_i$. Potom $A \cup B \subset \bigcup\limits_{i\in J\cup K} U_i$.

(b) Nechť $A - U$ má otevřené pokrytí $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Potom $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \cup U$ je otevřené pokrytí A a protože A je kompaktní, existuje konečná množina $J \in I$: $\bigcup\limits_{i\in J} U_i \subset A - U$

(c) $A \subset B$ a $\bar{B}$ je kompaktní. $\bar{A} \subset \bar{B}$. Nechť $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ je otevřené pokrytí množiny $\bar{A}$. Potom $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \cup X - \bar{A}$ tvoří otevřené pokrytí X a tedy i $\bar{B}$. Z kompaktnosti $\bar{B}$ víme, že existuje konečná indexová množina J, pomocí které pokryjeme $\bar{B}$. Potom $\bigcup\limits_{i\in J} U_i$ pokrývá i $\bar{A}$ a proto je kompaktní.

(d) Nechť $(A_i)_{i\in I}$ je systém kompaktních uzavřených podmnožin X. $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ je uzavřená množina. Nechť $\bigcup\limits_{i\in J} U_i$ je otevřené pokrytí $A_k \supset \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ (platí pro všechna k). Potom množiny $(U_i)_{i\in J}$ a $X - \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ pokrývají celé X a tedy i $A_k \forall k$. A_k je kompaktní $\Rightarrow$ má konečné podpokrytí $\Rightarrow \bigcap\limits_{i\in I} A_i \subset A_k$ má konečné pokrytí a proto je kompaktní.

Příklad: Průnik dvou kompaktních množin nemusí být kompaktní množina
prostor $(\mathbb{N} \cup \{x_1, x_2\}, \mathcal{T})$
topologie: $\mathcal{T} = 2^X \cup \{\mathbb{N} \cup \{x_1\}, \mathbb{N} \cup \{x_2\}\}$
$\{\mathbb{N} \cup \{x_1\}$ a $\{\mathbb{N} \cup \{x_2\}$ jsou kompaktní množiny a jejich průnik je $\mathbb{N}$, což není kompaktní množina

Věta: Uzavřená podmnožina kompaktního topologického prostoru X je kompaktní.

Věta: Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení topologických prostorů a $A \subset X$. Pokud je A kompaktní, tak je $f(A) \subset Y$ také kompaktní.

Důkaz: Nechť $(V_i)_{i\in I}$ je otevřené pokrytí $f(A)$. Potom $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ je otevřené pokrytí A. Z kompaktnosti A víme, že dokážeme najít konecné podpokrytí $(f^{-1}(V_i))_{i\in J}$, $(V_i)_{i\in J}$ pokrývá $f(A)$ a proto se jedná o kompaktní množinu.

Důsledek1: Faktorový prostor kompaktního prostoru je kompaktní.
Poznámka: Faktorový prostor je prostor reprezentantů tříd ekvivalence prostoru.
Důsledek2: Kompaktní topologický prostor není homeomorfní s nekompaktním topologickým prostorem.

Věta: Nechť M je kompaktní množina v topologickém prostoru X a $f : X \to Y$ spojité zobrazení. Zobrazení $f|_M$ nabývá na M své extrémy.

Věta: Nechť je množina A kompaktní. Potom kažná nekonečná podmnožina A má limitní bod. (Každé okolí X má s A neprázdný průnik.

Příklad: $X = \mathbb{Z}_+ \times Y$, přičemž na $\mathbb{Z}_+$ máme topologii konečných doplňků a na Y triviální topologii. Potom X není kompaktní, pokrytí $\{n\} \times Y$ nemá konečné podpokrytí, ale je limit point kompaktní

Definice: Mějme topologický prostor $(X, \mathcal{T})$. X se nazývá *limit point kompaktní* pokud kažná nekonečná podmnožina má limitní bod.
X se nazývá *sekvenciálně kompaktní* pokud každá posloupnost v X má konvergentní podposloupnost.

Věta: Nechť X je metrizovatelný prostor. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) X je kompaktní

(ii) X je limit point kompaktní

(iii) X je sekvenciálně kompaktní

(důkaz u limit point spojitosti)

2 Kompaktní Hausdorffovy prostory

Věta:

(a) Kompaktní množina v Hausdorffově prostoru je uzavřená.

(b) Průnik libovolného systému kompaktních množin v Hausdorffově topologickém prostoru je kompaktní množina.

Důkaz:

(a) X Hausdorffův, $A \subset X$.
Pokud $X - A = \emptyset$ potom $A = X$ a A je uzavřená. Nechť tedy $X - A \neq \emptyset$, $x \in X - A$ je libovolný bod. Potom $\forall y \in A$ existuje U_x okolí x a V_y okolí y takové, že $U_x \cap V_y = \emptyset$ (z Hausdorffovosti prostoru). Množiny V_y pokrývají A a z kompaktnosti A $J \subset I$ konečná taková, že $\{V_y^i\}_{i \in J}$ pokrývá A. Zároveň existuje $\{U_x^i\}_{i \in J}$ a $U = \bigcap_{i \in J} U_i$, okolí bodu x. $U \cap A = \emptyset$. Proto $U \subset X - A$ a z libovolnosti x platí, že $X - A$ je otevřená. Proto je A uzavřená.

(b) Dostaneme z (a) a části (d) věty v minulé kapitole

Důsledek: Kompaktní podmnožina metrizovatelného prostoru je uzavřená. (Každý metrizovatelný prostor je Hausdorffův.)

Věta: Spojitá bijekce kompaktního topologického prostoru na Hausdorffův prostor je homeomorfismus.

Věta (Hein-Borel): $A \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní právě tehdy, když A je uzavřená a ohraničená.
Důkaz:

$\Rightarrow$ A je kompaktní a $\mathbb{R}^n$ je Hausdorffův $\Rightarrow$ A je uzavřená
Z kompaktnosti A víme, že ji lze pokrýt konečným počtem koulí $\Rightarrow$ Existuje koule s maximálním poloměrem a ta množinu A ohraničuje.

$\Leftarrow$ A je uzavřená a ohraničená $\Rightarrow$ $A \subset$ uzavřený kvádr K, K je uzavřená a kompaktní množina $\Rightarrow$ A je kompaktní.

3 Limit point kompaktnost

Definice: Prostor X se nazývá *limit point kompaktní*, pokud má každá nekonečná podmnožina X limitní bod.

Věta: Kompaktnost implikuje limit point kompaktnost.

Definice: $(X, \mathcal{T})$. $\{x_n\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů X. X se nazývá *sekvenciálně kompaktní* pokud každá posloupnost v X má konvergentní podposloupnost.

Věta: Nechť X je metrizovatelný prostor. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) X je kompaktní

(ii) X je limit point kompaktní

(iii) X je sekvenciálně kompaktní

Důkaz:

(i) $\Rightarrow$ (ii) X je kompaktní, $A \subset X$ je nekonečná podmnožina X. Chceme ukázet, že má limitní bod. Sporem: Předpokládejme, že A nemá limitní bod. Potom obsahuje všechny své limitní body $\Rightarrow$ $\bar{A} = A$ (je uzavřená). Dále $\forall a \in A$ vybereme takové okolí U_a, že $U_a \cap A = \{a\}$. Potom X pokryjeme otevřenými množinami U_a a $X - A$. Z kompaktnosti A víme, že z množin U_a umíme vybrat konečné podpokrytí. $X - A \cap A = \emptyset$ a U_a vždy obsahuje pouze jeden prvek z A $\Rightarrow$ A by musela být konečná - spor s předpoklady.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) X je limit point kompaktní. Uvažujme $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.
Pokud je A konečná množina, $\exists x : x = x_n$ pro nekonečně mnoho n. $\Rightarrow \{x_n\}$ má triviálně konvergentní podposloupnost.
Pokud je A nekonečná množina, A má limitní bod x. Pro posloupnost $\{x_n\}$ definujeme podposloupnost $x_1 \in B(x, 1), x_{n_i} \in B(x, \frac{1}{i})$, která konverguje k x.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Nejdříve ukážeme, že pokud je X sekvenciálně kompaktní, tak platí lemma o Lebesguově čísle, t.j. pokud máme otevřené pokrytí X, tak $\exists \delta > 0$ takové, že pro každou podmnožinu A s diametrem$< \delta$ existuje prvek z pokrytí, ve kterém je A obsažena. Sporem: Předpokládejme, že $\nexists \delta \Rightarrow \forall n \exists Cn$ množina s diametrem $< \frac{1}{n}$, která není obsažena v žádné množině z pokrytí. $\forall n$ vybereme $x_n \in C_n$. $\{x_n\}$ tvoří posloupnost a z předpokladu plyne, že obsahuje konvergentní podposloupnost, které konverguje k $a \in A$ (množina z pokrytí). A je otevřená $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B(a, \epsilon) \subset A$. Pokud je i dostatečně velké, platí $\frac{1}{n_i} < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow C_{n_i}$ leží v $\frac{\epsilon}{2}$ okolí bodu x_{n_i}. Zároveň pokud je i dostatečně velké, platí $d(x_{n_i}, a) < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow C_{n_i}$ leží v ϵ okolí bodu a. Proto $C_{n_i} \subset A$, což je spor.

Dále ukážeme, že pokud je X sekvenciálně kompaktní, tak $\forall \epsilon > 0$ existuje konečné pokrytí X otevřenými ϵ-koulemi. Sporem: Předpokládjme, že $\exists \epsilon > 0$ takové, že X neumíme pokrýt konečným počtem ϵ-koulí. Zkonstruujeme posloupnost $\{x_n\} : x_1$ je libovolný bod z X, $B(x_1, \epsilon) \neq X$ a $x_{n+1} \notin B(x_1, \epsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \epsilon)$, z čehož vyplývá $d(x_{n+1}, x_i) \geq \epsilon \ \forall i = 1, \dots n$. Proto $\{x_n\}$ nemůže mít konvergentní podposloupnost, což je spor.
Zbývá dokázat, že X je kompaktní. Nechť $\mathcal{A}$ je otevřené pokrytí X. Z prvního kroku víme, že má Lebesguovo číslo δ. Nechť $\epsilon = \frac{\delta}{3}$, z druhého kroku víme, že existuje konečné pokrytí X otevřenými ϵ-koulemi, kde každá z nich má průměr maximálně $\frac{2\delta}{3}$, a proto leží v nějakém prvku z $\mathcal{A}$ (důsledek Lebesguova lemma). Pokud pro každou kouli zvolíme jeden prvek z pokrytí, dostaneme konečné pokrytí X.

4 Lokální kompaktnost

Definice: X se nazývá *lokálně kompaktní*, pokud pro každé $x \in X$ existuje C kompaktní okolí.

Věta: X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor právě tehdy, když existuje prostor Y, pro která platí:

(i) X je podprostor Y

(ii) $Y \backslash X$ obsahuje jediný bod

(iii) Y je kompaktní Hausdorffův prostor.

Pokud existují Y a Y' dva prostory splňující dané podmínky, pak existuje $f : Y \to Y'$ homeomorfismus takový, že $f|_X = id$

Důkaz:

1.krok (nejdříve konec) Nechť Y a Y' jsou dva prostory takové, že $h : Y \to Y', p \mapsto q, h|_X = id$. U otevřená v $Y \Leftrightarrow h(U)$ je otevřená v Y'.
$p \notin U \Rightarrow h(U) = U$, U je otevřená v Y a $X \subset Y$, proto je otevřená i v X, a protože X je otevřená v Y, je i U otevřená v Y.
$p \in U$, $C = Y - U$ je uzavřená v $Y \Rightarrow C$ je kompaktní. $C \subset X \subset Y' \Rightarrow C$ je kompaktní podprostor Y', Y' je Hausdorffův, C je uzavřený v $Y' \Rightarrow Y' - C = h(U)$ je otevřený v Y'.

2.krok X je lokálně kompaktní Hausdorffův, vezmeme $a \notin X$. $Y = X \cup a$ a zavedeme topologii: otevřené množiny jsou otevřené množiny v X a $\forall Y - C$, kde C je kompaktní podprostor X. (je třeba dokázat, že se jedná o topologii). Teď ukážeme, že X je podprostor Y. U otevřená v Y, $U \cap X = U$. $U = Y - C \Rightarrow (Y - C) \cap X = X - C$ otevřená v X (...?)
Y je kompaktní: Nechť $\mathcal{A}$ je otevřené pokrytí Y. $\mathcal{A}$ musí obsahovat i množinu tvaru $Y - C$, protože žádné z množin 1. typu neobsahují bod a. Vezmeme množiny z $\mathcal{A}$ kromě těch ve tvaru $Y - C$, to je pokrytí X a z něj existuje konečné podpokrytí, protože X je kompaktní. Plus vezmeme jednu množinu $Y - C$ a stále máme konečné pokrytí.
Y je Hausdorffův: Pokud $x, y \in X$, není co dokazovat (X je Hausdorffův), zajímá nás tedy případ $x \in X, y = a \notin X$. X je lokálně kompaktní $\Rightarrow \exists C$ kompaktní okolí x obsahující U. Potom $Y - C$ je okolí a a $U \cap Y - C = \emptyset$

3.krok (opačná implikace) Nechť existuje Y splňující podmínky věty. Potom X je Hausdorffův. Chceme ukázat, že $\forall x \in X$ je X lokálně kompaktní. $a \in Y - X$ jediný bod, $x \in U, a \in V$ okolí. Z Hausdorffovosti víme, že $U \cap V = \emptyset$. $C = Y - V$ je uzavřená v $Y \Rightarrow C$ je kompaktní podprostor Y a obsahuje U.

Mohou nastat dvě situace - X je kompaktní $\Rightarrow$ Y dostaneme přidáním 1 izolovaného bodu, nebo X není kompaktní $\Rightarrow \bar{X} = Y$

Definice: Pokud je Y kompaktní Hausdorffův prostor a $X \subset Y$ takový, že $\overline{X} = Y$, potom Y se nazývá *kompaktifikace* X. Pokud $Y \backslash X = \{a\}$, potom Y se nazývá jednobodová kompaktifikace X.

Věta: Nechť X je Hausdorffův prostor. Potom X je lokálně kompaktní právě tehdy, když $\forall x \in X$ a $\forall U_x$ okolí bodu x existuje V_x okolí bodu x takové, že $\overline{U}_x$ je kompaktní a $\overline{V} \subset U$.

Důsledek: Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor a $A \subset X$ podprostor. Pokud je A uzavřený nebo otevřený v X, tak je A lokálně kompaktní.

Důsledek: X je homeomorfní k otevřenému podprostoru kompaktního Hausdorffova prostoru právě tehdy, když je X lokálně kompaktní Hausdorffův.