40. Bifurkace

Definice: Dva toky φ_t, ψ_t jsou *topologicky konjugované*, pokud existuje homeomorfismus $h : M \to M$ takový, že $h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti: Nechť φ_t, ψ_t jsou topologicky konjugované toky, $h : M \to M$ příslušný homeomorfismus. Potom platí:

(i) h zobrazuje stabilní rovnovážné stavy na stabilní rovnovážné stavy (a nestabilní na nestabilní)

(ii) h zobrazuje uzavřené trajektorie na uzavřené trajektorie o stejné periodě

(iii) h zobrazuje ω-limitní množiny trajektorií na ω-limitní množiny trajektorií (a α-limitní na α-limitní)

(iv) h zobrazuje homoklinické trajektorie na homoklinické trajektorie (a heteroklinické na heteroklinické)

Poznámka: Trajektorie, které začíná a končí v různých bodech se nazývá *heteroklinická* a trajektorie, která začíná a končí v jednom bodě se nazývá *homoklinická*.

Definice: Dva toky φ_t, ψ_t jsou *topologicky ekvivalentní*, pokud existuje homeomorfismus h, který zobrazuje trajektorie toku φ_t na trajektorie toku ψ_t při zachování jejich orientace (nemusí zachovávat parametrizaci).

$$h \circ \varphi_t(x) = \psi_{\tau_{h(x)}(t)} \circ h(x)$$

Přičemž $\tau_{h(x)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rostoucí homeorfismus takový, že platí

$$\tau_{h(x)}(0) = 0 \text{ a } \lim_{t \to \pm\infty} \tau_{h(x)}(t) = \pm\infty$$

a pokud je $\tau_{h(x)}$ identita, jedná se o konjugaci.

Vlastnosti: Nechť φ_t, ψ_t jsou topologicky ekvivalentní toky, $h : M \to M$ příslušný homeomorfismus. Potom vlastnosti (i), (iii) a (iv) platí stejně jako u konjugace.

(ii) h zobrazuje uzavřené trajektorie na uzavřené trajektorie, přičemž nemusí mít stejnou periodu.

Definice: Řekneme, že rovnice $x' = X(x, \mu)$ má v bodě (x_0, μ_0) *bifurkaci*, jestliže se chování řešení v okolí bodu x_0 podstatným způsobem změní v okamžiku μ_0.
Podstatnou změnou chování rozumíme typicky vznik/zánik stacionárního bodu či změnu jeho stability.

Formálně: $x' = X(x), y' = Y(x)$, norma: $||X||_1 = \sup\limits_{x\in U}\{\sum\limits_{i=1}^{n} |X^i(x)| + \sum\limits_{i,j=1}^{n} |\frac{x^i(x)}{\partial x_j}|\}$

Definice: Vektorová pole $X(x)$ a $Y(x)$ jsou ε-*blízká*, jestliže platí

$$||X(x) - Y(x)|| < \varepsilon$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$. Všechna ε-blízká vektorová pole tvoří ε-okolí $(N_\varepsilon(X))$.

Definice: Soustava $x' = X(x)$ je *strukturálně stabilní*, jestliže existuje $N_\varepsilon(X)$ takové, že pro všechna $Y \in N_\varepsilon(X)$ jsou řešení soustavy $x' = Y(x)$ topologicky ekvivalentní se soustavou $x' = X(x)$.
Jestliže je $X(x, \mu)$ strukturálně stabilní, potom při malé změně μ nedochází k bifurkaci.

Definice: Hodnotě parametru, při které dochází k bifurkaci fázového portrétu nazýváme *bifurkační hodnota parametru.*

Definice: *Bifurkační diagram* je grafické znázornění závislosti rovnovážných stavů na parametru μ.

Bifurkace sedlo-uzel: Dva rovnovážné stavy (sedlo(nestabilní) a uzel(stabilní)) se spojí a bifurkací zaniknou.

$$x' = \mu + x^2 \qquad y' = -y$$

Transkritická bifurkace: Dva rovnovážné stavy, které si "vymění chování" - stabilní uzel se změní v sedlo (vždy nestabilní) a sedlo se změní ve stabilní uzel.

$$x' = \mu - x^2 \qquad y' = -y$$

Vidličková bifurkace: Rovnovážný stav (stabilní uzel) změní stabilitu (nestabilní uzel) a vzniknou dva nové (stabilní uzly).

$$x' = \mu x - x^3 \qquad y' = -y$$

Hopfova bifurkace: (komplexní kořeny) Stabilní ohnisko přechází v nestabilní a objevuje se stabilní orbita. Systém převádíme do polárních souřadnic.

$$x' = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \qquad y' = x + \mu y - y(x^2 + y^2)$$

Hopfova věta: Nechť $x' = X(x, \mu)$, kde $x \in \mathbb{R}^n$ a $\mu \in \mathbb{R}$ je parametr. Dále nechť platí:

(i) $x(\mu)$ je rovnovážný stav soustavy $x = X(x, \mu)$, tj. platí $X(x(\mu), \mu) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

(ii) matice linearizace $J(x(\mu)) = \dfrac{\partial X(x, \mu)}{x}$ má dvojici imaginárních komplexně sdružených vlastních čísel $\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$ a zbývajících $n - 2$ vlastních čísel $\lambda_3, \lambda_4, \ldots \lambda_n$ má záporné reálné části

(iii) pro $\mu = \mu^*$ platí: $\alpha(\mu^*) = 0$, $\alpha'(\mu^*) \neq 0$, $\omega(\mu^*) > 0$

(iv) rovnovážný stav $x(\mu^*)$ je asymptoticky Ljapunovsky stabilní.

Pak se pro $\mu = \mu^*$ odvětví od rovnovážného stavu $x(\mu^*)$ jednoparametrický systém uzavřených trajektorií γ_μ.

Definice: Ve víceparametrických systémech může docházet ke *globálním bifurkacím.* Například může jít o *Bogdanovu-Takensovu bifurkaci*, kde je nulové vlastní číslo dvojnásobné nebo *Bautinovu bifurkaci*, neboli zobecněnou Hopfovu bifurkaci, kde je porušena podmínka nedegenerovanosti Hopfovy bifurkace.

Bodgan-Takensova bifurkace: Dvouvimenzionální dvouparametrický systém, v okolí počátku je lokálně topologicky ekvivalentní systému

$$y_1' = y_2 \qquad y_2' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y_1 + y_1^2 + s y_1 y_2$$

Bautionova bifurkace: Dvoudimenzionální dvouparametrický systém, Bautinova bifurkace způsobuje, že vlivem druhého parametru dochází k narušení podmínky nedegenerovanosti u Hopfovy bifurkace. V polárních souřadnicích tak dostáváme

$$\rho' = \rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \rho^2 \pm \rho^4) \qquad \varphi' = 1$$

Rovnovážná řešení odpovídají limitním cyklům.

Blue-sky catasthrophe: Bifurkace periodické orbity, objevuje se ve slow-fast systémech (např. u neuronů s hysteresí při skoku z rovnováhy do stabilních oscilací)