31. Konvergence v topologických prostorech a metrické prostory

1 Základy obecné topologie

Definice: *Topologie* na množině X je množina $\mathcal{T}$ jejich podmnožin s následujícími vlastnostmi:

- A,B $\in \mathcal{T} \Rightarrow$A$\cap$B $\in \mathcal{T}$
- $A_\alpha \in \mathcal{T}\ \forall\alpha \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}$
- $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$

Prvky množiny $\mathcal{T}$ se nazývají *otevřené množiny*. Doplňky otevřených množin se nazývají *uzavřené množiny*.

Příklady:

- *Antidiskrétní (triviální) topologie:* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
- *Diskrétní topologie:* $\mathcal{T} = 2^X$

Definice: Okolím bodu a v topologickém prostoru je libovolná otevřená množina obsahující a.

Definice: Topologický prostor se nazývá *Hausdorffův*, pokud pro každé dva různé body existují disjunktní okolí. Jinak řečeno $\forall x, y \in X, x \neq y\ \exists U_x$ okolí x a U_y okolí $y : U_x \cap U_y = \emptyset$

Definice: *Báze topologie* je systém $\mathcal{B}$ otevřených množin takový, že každá otevřená množina je sjednocením prvků z $\mathcal{B}$:

$$U \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists B_\alpha \in \mathcal{B} : U = \bigcup_\alpha B_\alpha$$

Subbáze topologie je systém $\mathcal{S}$ otevřených množin takový, že jejich konečné průniky tvoří bázi:

$$\{\bigcap_{j=1}^{n} U_j, U_j \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}\}$$

Věta: Pro každou bázi $\mathcal{B}$ platí

(i) $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} = X$

(ii) $U_1, U_2 \in \mathcal{B} a x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists U_3 \in \mathcal{B} : U_3 \subset U_1 \cap U_2$

Naopak každý systém $\mathcal{B}$ podmnožin X splňující tyto dva axiomy je bází nějaké (jednoznačně určené) topologie na X.

Definice: *Dlouhou posloupností* v množině X nazýváme soubor jejích prvků $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$, indexovaný nějakou usměrněnou množinou $\mathcal{N}$.

Věta: Něchť X, Y jsou topologické prostory, $f : X \to Y$ je zobrazení a $x \in X$. Pak jsou tato tvrzení ekvivalentní:

(i) f je spojité v x

(ii) pro každou dlouhou posloupnost $x_n \to x$ v X platí

Věta: Množina $\mathcal{F}$ v topologickém prostoru je uzavřená, právě tehdy když, každá dlouhá posloupnost, která má limitu a všechny její členy leží v $\mathcal{F}$, má limitu v $\mathcal{F}$.
Definice: Nechť A je podmnožina topologického prostoru X.

(1) *Uzávěr* Ā množina A je průnik všech uzavřených množin obsahujících A:

$$\overline{A} := \bigcap_{A\subset F} F$$

(2) *Vnitřek* $IntA$ množiny A je sjednocení všech otevřených množin obsažených v A:

$$IntA := \bigcup_{U\subset A} U$$

(3) *Hranice* ∂A množiny A je množina všech bodů takových, že každé jejich okolí obsahuje jak bod z A, tak bod mimo A:

$$x \in \partial A \Leftrightarrow [U \text{okolí } x \Rightarrow (U \cap A \neq \emptyset \ \& \ U \backslash A \neq \emptyset)]$$

2 Metrické prostory

Definice: Metrikou na množině X nazýváme zobrazení $d : X \times X \to [0; \infty)$ takové, že:

(1) $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in X$ trojúhelníhová nerovnost

(2) $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$ symetričnost

(3) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Množina X spolu s metrikou d tvoří *metrický prostor* (X, d).

Příklady:

- $(\mathbb{R}, d), d := |x - y|$
- $(\mathbb{R}^n, d), d := \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$
- $(\mathbb{R}^n, d), d := \max_j |x_j - y_j|$

Definice: Nechť X je metrický prostor s metrikou d. Otevřenou koulí se středem v $x \in X$ a poloměrem $r > 0$ nazýváme množinu

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Uzavřenou koulí nazýváme množinu

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

Věta: Definujme na metrickém prostoru X následující systém $\mathcal{O}$ jeho podmnožin: $U \subset X$ patří do $\mathcal{O}$ právě tehdy když spolu s každým svým bodem x obsahuje také nějakou otevřenou kouli $B(x, r)$. Pak $\mathcal{O}$ je topologie na X. (indukovaná metrikou)

Věta: Posloupnost bodů x_n metrického prostoru konverguje (v indukované topologii) k bodu x právě tehdy, když posloupnost čísel $d(x_n, x)$ konverguje k nule:

$$x_n \to x \Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0$$

Věta: Nechť X, Y jsou dva metrické prostory a $f : X \to Y$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) f je spojité v $x \in X$

(ii) $x_n \to x \in X \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \in Y$

(iii) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$

Věta: Nechť X, Y jsou dva metrické prostory a $f : X \to Y$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) f je spojité na X

(ii) vzor libovolné otevřené množiny v Y při zobrazení f je otevřená množina v X

Definice: Posloupnost x_n bodů v metrickém prostoru X se nazývá *Cauchyovská*, pokud $\forall \epsilon > 0 \exists N : m, m \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$.
Opačná implikace platí pouze pro úplné prostory.

3 Zúplnění metrického prostoru

Definice: Nechť $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ jsou dva metrické prostory. $f : X_1 \to X_2$ se nazývá *izometrie* pokud $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))\ \forall x, y \in X_1$. Metrické prostory jsou izometrické, pokud mezi nimi existuje izometrie.

Definice: Izometrie $f : X_1 \to X_2$, kde X_2 je úplný metrický prostor, a taková, že $f(X_1)$ je hustá množina v X_2, se nazývá *zúplnění metrického prostoru* X_1.

Hausdorffova věta o zúplnění metrického prostoru: Každý metrický prostor je izometrický s podprostorem úplného metrického prostoru.

Důkaz:
(X, d) metrický prostor
Nechť $S = \{x_i\}$, $T = \{y_i\}$ jsou dvě Cauchyovské posloupnosti v X.
$\forall i, j$ platí $d(x_i, y_i) \leq d(x_i, x_j) + d(x_j, y_j) + d(y_j, y_i)$
takže $d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j) \leq d(x_i, x_j) + d(y_j, y_i)$
podobně $d(x_j, y_j) - d(x_i, y_i) \leq d(x_i, x_j) + d(y_j, y_i)$
Proto $|d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j)| \leq d(x_i, x_j) + d(y_j, y_i)\ \forall i, j \in \mathbb{N}$
Nechť $\epsilon > 0$ je libovolné. Potom $\exists n_0 : \forall i, j \geq n_0 : d(x_i, x_j) < \frac{\epsilon}{2}$ a $d(y_i, y_j) < \frac{\epsilon}{2}$
$\Rightarrow |d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \Rightarrow \{d(x_i, y_i)\}$ je Cauchyovská v $\mathbb{R}$ a z úplnosti $\mathbb{R}$ plyne, že $\exists \lim_{i\to\infty} d(x_i, y_i) = d'(S, T)$.
Pomocí této funkce d' definujeme na množině všech Cauchyovských posloupností relaci ekvivalence: $d'(S, T) = 0 \Leftrightarrow S \sim T$. Evidentně je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Položme $d''([S], [T]) = d'(S, T)$. Ukažme nejdříve, že d'' nezáleží na volbě reprezentantů tříd: Mějme S', T' jiné reprezentanty tříd $[S], [T]$.
$d'(S', T') \leq d'(S', S) + d'(S, T) + d'(T, T') = d'(S, T)$ opačná nerovnost platí také a proto $d'(S', T') = d'(S, T)$
Označme ϵX množinu všech tříd Cauchyovských posloupností v metrickém prostoru X. d'' je metrika na ϵX:

1. $d'' \geq 0$
2. $d''([S], [T]) = d''([T], [S])$
3. $d''([S], [T]) = d''([S], [U]) + d''([U], [T])$ (limitním přechodem z d', $d'(S, T) \leq d'(S, U) + d'(U, T)$ a to platí z $d(x_i, y_i) \leq d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i)$)

Teď ukážeme, že $(\epsilon X, d'')$ je úplný metrický prostor.
Nechť $[S_1], [S_2], ...$ je libovolná Cauchyovská posloupnost v ϵX. Zvolíme reprezentanta třídy $[S_i]$ a označíme $S_i = \{x_{i,j}\}$. $\Rightarrow \forall i \forall \epsilon = \frac{\epsilon}{3} > 0\ \exists n_i : \forall k, l \geq$

$n_i : d(x_{i,k}, x_{i,l}) < \frac{\epsilon}{3}(*)$
Definujeme $S = (x_{1,n_1}, x_{2,n_2}, x_{3,n_3}...)$.Ukážeme, že S je Cauchyovská v X a $[S_1], [S_2], ..., [S_n]$ konvergují k S: $\{[S_n]\}$ je Cauchyovská v $\epsilon X \Rightarrow \forall \frac{\epsilon}{3} > 0 \ \exists n_0 :$ $\forall m, n \geq n_0 : d''([S_m], [S_n]) < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow d'(S_m, S_n) < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow \lim\limits_{j \to \infty} d(x_{m,j}, x_{n,j}) < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow$
$\exists \eta_0 : \forall j \geq \eta_0, \ m, n \geq n_0 : d(x_{m,j}, x_{n,j}) < \frac{\epsilon}{3}(**)$
Pomocí trojúhelníkové nerovnosti spojíme $(*)$ a $(**)$ a dostaneme:
$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta : \forall i, j \geq \eta \Rightarrow d(x_{i,n_i}, x_{j,n_j}) < \epsilon$, což znamená, že S je Cauchyovská posloupnost. Stačí ukázat, že $[S_1], [S_2], ..., [S_n]$ konverguje k $[S]$:
$d''([S_i], [S]) = d'(S_i, S) = \lim\limits_{j \to \infty} d(x_{i,j}, x_{j,n_j})$
a zároveň $d(x_{i,j}, x_{j,n_j}) \leq d(xi, j, x_{i,n_i}) + d(x_{i,n_i}, x_{j,n_j})$
Potom platí $\forall \epsilon = \frac{\epsilon}{6} \ \exists n_i : \forall k, l \geq n_i \Rightarrow d(x_{i,j}, x_{j,n_j}) < \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{j \to \infty} d(x_{i,j}, x_{j,n_j}) <$
ϵ
Proto pro $\forall i \geq \eta$ platí $d''([S_i], [S]) \leq \epsilon \Leftrightarrow [S] = \lim_{i \to \infty}$ a tím jsme dokázali, že ϵX je metrický prostor. Pro $x \in X$ položíme $f(x) = [x]$, kde x označuje třídu v ϵX obsahující posloupnost $(x, x, x, ...)$. Pro libovolné $x, y \in X$ máme $d''(f(x), f(y)) = \lim\limits_{j \to \infty} d(x_j, y_j) = d(x, y)$ a platí $f(\bar{X}) = \epsilon X$.
Tím máme dokázáno, že $f : X \to \epsilon X$ je izometrie a důkaz je hotov.

Důsledek: Ke každému metrickému prostoru existuje jeho zúplnění.
Důsledek: Každá Cauchyovská posloupnost v metrickém prostoru je ohraničená.