33. Souvislé, obloukově souvislé a lokálně souvislé prostory

1 Souvislost a kompaktnost

Definice: Nechť $(X, \mathcal{T})$ topologický prostor. *Rozdělení* X je dvojice $U, V \in \mathcal{T}$, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cup V = X$. Prostor X se nazývý *souvislý*, pokud neexistuje rozdělení X.

Věta: X je souvislý právě tehdy, když jediné množiny, které jsou zároveň otevřené i uzavřené, jsou $\emptyset$ a X.

Lemma: $Y \subset X$ je podprostor. Rozdělení Y je $A \cup B$, kde žádné z A a B neobsahuje limitní bod z té druhé množiny.

Lemma: Pokud $X = C \cup D$ je rozdělení X a Y je souvislý podprostor X, tak $Y \subset C$ nebo $Y \subset D$.

Věta: Sjednocení souvislých podprostorů X, které mají aspoň 1 společný bod, je souvislá množina.

Věta: Nechť A je souvislý podprostor X. Pokud $A \subset B \subset \overline{A}$, potom je B také souvislá.

Věta: Nechť $f : X \to Y$ spojité zobrazení a X souvislá množina. Potom $f(X)$ je souvislá v Y.

Věta: Konečný kartézský součin souvislých prostorů je souvislá množina.

1.1 Zevšeobecnění věty o střední hodnotě

Definice: Jednoduše uspořádaná množina L, která má více než jeden prvek se nazývá *lineární kontinuum* pokud platí:

(i) Každá neprázdná podmnožina L, která je ohraničená, má supremum.

(ii) Pokud $x < y$, pak existuje z takové, že $x < z < y$.

Věta: Pokud je L lineární kontinuum, tak L je souvislá a souvislé jsou i intervaly (i nekonečné) v L.

Věta o střední hodnotě: Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení, X je souvislý a Y je uspořádaná množina. Pokud $a, b \in X$ a $f(a) < r < f(b)$, potom $\exists c \in X$ takové, že $f(c) = r$.

2 Path souvislost a lokální souvislost

Definice: Nechť $x, y \in X$, *cesta z x do y* je spojité zobrazení $f : [a, b] \to X$ takové, že $f(a) = x$ a $f(b) = y$. X se nazývá *path souvislá*, pokud každá dvojice bodů z X může být spojená cestou.

Definice: $X, x \sim y$ pokud existuje souvislý podprostor X, který obsahuje x i y. Třídy ekvivalence se nazývají *komponenty* X.

Věta: Komponenty X jsou souvislé podprostory X, které jsou disjunktní, jejich sjednocení je celé X a každý neprázdný souvislý podprostor X má neprázdný průnik nejvíce s jednou komponentou.

Definice: Definujeme relaci ekvivalence na X jako $x \sim y$ pokud existuje cesta z x do y v X. Třídy ekvivalence v této relaci tvoří *path komponenty.*

Věta: Path komponenty X jsou path souvislé podprostory X, které jsou disjunktní, jejich sjednocení je celé X a každý neprázdný path souvislý podprostor X má neprázdný průnik nejvíce s jednou komponentou.

Příklad:
$S = \{[x, sin(\frac{1}{x})], 0 < x \leq 1\}$ - topologická sinusoida
$\overline{S} = S \cup [-1, 1]$ - její uzávěr (spolu s intervalem na přímce)
S je path csouvislý, ale $\bar{\text{S}}$ není.
S i $\bar{\text{S}}$ jsou souvislé.

Definice: X se nazývá *lokálně souvislý v x* pokud pro každé $\mathcal{U}$ okolí bodu x existuje $\mathcal{V}$ souvislé okolí bodu x, které je obsaženo v $\mathcal{U}$. Pokud je X lokálně souvislý v každém bodě, pak říkámě, že X *je lokálně souvislý.*
Analogicky X se nazývá *lokálně path souvislý v x* pokud pro každé $\mathcal{U}$ okolí bodu x existuje $\mathcal{V}$ path souvislé okolí bodu x, které je obsaženo v $\mathcal{U}$. Pokud je X lokálně path souvislý v každém bodě, pak říkámě, že X *je lokálně path souvislý.*

Věta: X je lokálně souvislý právě tehdy, když pro každou otevřenou podmnožinu X platí, že každý její souvislý komponent je otevřený v X.

Věta: X je lokálně path souvislý právě tehdy, když pro každou otevřenou podmnožinu X platí, že každý její path souvislý komponent je otevřený v X.

Věta: X topologický prostor. Každý path souvislý komponent X leží v nějakém souvislém komponentu X. Pokud je X lokálně path souvislý, potom jsou souvislé a path souvislé komponenty totožné.

Věta: Součin konečně mnoha kompaktních prostorů je kompaktní.

Definice: Množina ε podmnožin množiny X má vlastnost *konečného průniku*, pokud pro každou konečnou podmnožinu $\mathcal{C} = C_1, C_2, ..., C_n$ platí, že
$C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n \neq \emptyset$

Věta: Něchť X je topologický prostor. X je kompaktní právě tehdy, když pro každou množinu uzavřených podmnožin $\mathcal{C}$, která má vlastnost konečného průniku platí, že $\bigcap\limits_{C_i \in \mathcal{C}} C_i \neq \emptyset$

Důkaz: Uvažujeme k množinám z $\mathcal{C}$ jejich doplňky $X - C_i$, které jsou uzavřené.
Z De Morganových pravidel $X - (\bigcup\limits_{\alpha \in J} C_\alpha) = \bigcap_{j \in J}(X - C_\alpha)$ plyne:
$\mathcal{C}$ pokrývá $X \Leftrightarrow \bigcap\limits_{C_i \in \mathcal{C}} X - C_i = \emptyset$

Konečná množina C_i pokrývá $X \Leftrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{k} X - C_i = \emptyset$
X je kompaktní $\Leftrightarrow$ Pro každou množinu otevřených podmnožin $A_i = X - C_i$ platí, že pokud $\mathcal{A}$ pokrývá X, potom nějaká konečná podmnožina $\mathcal{A}$ pokrývá X.
$\Leftrightarrow$ Pokud máme množinu otevřených podmnožin $\mathcal{A}$, pro které platí, že žádná konečná podmnožina této množiny nepokrývá X, potom ani $\mathcal{A}$ nepokrývá X.
(dodělat něco třeba)

Věta - Lebesguovo číslo: Nechť $\mathcal{A}$ je otevřené pokrytí metrického prostoru (X, d). Pokud X je kompaktní, tak $\exists \delta > 0$ takové, že pro každou podmnožinu X, pro kterou $sup\{d(a_1, a_2), a_1, a_2 \in A\} < \delta$ existuje prvek z $\mathcal{A}$, který ji obsahuje.

Věta - o rovnoměrné spojitosti: Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení kompaktního metrického prostoru (X, d_1) do metrického prostoru (Y, d_2). Potom f je rovnoměrně spojité.