41. Orbity a jiné invariantní množiny v teorii dynamických systémů

Definice: Dynamický systém je (φ, Ω) takový, že $\Omega \in \mathbb{R}^n$ je stavový prostor a $\varphi : T \times \Omega \to \Omega$. Pokud je $T = \mathbb{R}$, tak je jedná o spojitý systém, pokud $T = \mathbb{N}$, jde o diskrétní systém. Platí:

(i) $\varphi(0, x) = x$ pro každé $x \in \Omega$

(ii) $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x)$ pro každé $x \in \Omega$, pro každé $s, t \in T$

Definice: *Tok* na M je spojité diferencovatelné zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ takové, že pro $\forall t \in \mathbb{R}$ zobrazení $\varphi(t, \bullet) = \varphi_t(\bullet)$ a splňuje:

(i) $\varphi_0 = id_M$

(ii) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ pro $t, s \in \mathbb{R}$

Poznámka: Z vlastností (i) a (ii) vyplývá, že existuje $(\varphi_t)^{-1}$ a platí $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$. $\varphi \in \mathcal{C}^1$ implikuje, že $\varphi_t : M \to M$ je difeomorfismus pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Definice: Trajektorie v diskrétním dynamickém systému je $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ a ve spojitém dynamickém systému je $\{\varphi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$.

Definice: Jestliže $\varphi_t(x^*) = x^*$ pro každé $t \in \mathbb{R}$, potom je x^* *pevný bod*. Bod, který není pevný, nazýváme *regulární bod.*
Stabilita pevného bodu:

- Stabilní (Ljapunovsky) - $\forall N \in Nb_{x^*} \exists N' \subseteq N, N' \in Nb_{x^*}$ $\forall\ x \in\ N' :\ \varphi_t(x)\ \in\ N\ \forall\ t$
  - asymptoticky stabilní ($\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_t(x) = x^*$)
  - neutrálně stabilní (je stabilní, ale ne asymptoticky)
- Nestabilní (není stabilní)

Definice: *Uzavřená orbita* regulárního bodu je trajektorie γ, která není trajektorie pevného bodu, ale platí: $\varphi_\tau(x) = x$ pro nějaké $x \in \gamma$ a $\tau \in \mathbb{R}, \tau \neq 0$.

Definice: $x(t) = (x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t))$
$\vec{x'(t)} = (x_1'(t), x_2'(t) \dots x_n'(t))$
Vektorové pole: $\vec{x'(t)} = X(x)$
Každé řešení Cauchyho úlohy je vektorovým tokem: $X(x) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\varphi(\varepsilon, x) - \varphi(0, x)}{\varepsilon}$

Tvrzení: $\varphi_t(x_0)$ je řešením $x' = X(x)$ procházejícím x_0 v čase $t = 0$.

Definice: Množina $A \subseteq M$ je *invariantní* vzhledem k difeomorfismu f (toku φ), jestliže pro každé $a \in A$ platí:

$$\forall m \in \mathbb{Z} : f^m(x) \in A \text{ ,tj. } f(A) \subseteq A$$

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_t(x) \in A \text{ ,tj. } \varphi_t(A) \subseteq A$$

Poznámka: Platí, že množina $A \subseteq M$ je invariantní $\Leftrightarrow \forall x \in A : \gamma_x \subseteq A$

Definice: Bod $x \in M$ je *nebloudivým bodem* toku φ, jestliže pro všechna $W \in Nb_x$ existuje $t > 0$: $\varphi_t(W) \cap W \neq \emptyset$.

Definice: Bod $y \in M$ je ω-*limitním bodem* trajektorie bodu x, jestliže existuje $m_i \to \infty$ ($t_i \to \infty$) tak, že $\lim\limits_{i\to\infty} f^{m_i}(x) = y$ ($\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_{t_i}(x) = y$)

Definice: Bod $y \in M$ je α-*limitním bodem* trajektorie bodu x, jestliže existuje $m_i \to -\infty$ ($t_i \to \infty$) tak, že $\lim\limits_{i\to\infty} f^{m_i}(x) = y$ ($\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_{t_i}(x) = y$)

Vlastnosti:

1. $\omega(x), \alpha(x)$ jsou invariantní pro všechna x
   Důkaz: Nechť $z = \varphi_t(y)$ pro $t \in \mathbb{R}$ a $y \in \omega(x) \Rightarrow \lim\limits_{i\to\infty} \varphi_{t_i}(x) = y$ pro $\{t_i\} \to \infty$. Proto $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_{t_i+t}(x) = \varphi_t(y) = z$
   pro $y \in \alpha(x)$ analogicky, $\{t_i\} \to -\infty$
2. $\omega(x), \alpha(x) \subset \Omega$ (nebloudivé body)
   Důkaz: Předpokládejme $y \in \omega(x)$ a $y \notin \Omega \Rightarrow$ existuje $V \in Nb_y$: $\varphi_t(V) \cap V = \emptyset$ pro každé $t > 0$. Protože ale $y \in \omega(x)$, existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $\varphi_{t_i} \in V$ pro každé $i > N$. Proto existuje $z = \varphi_{t_N}(x) \in V : \varphi_{t_i - t_N}(z) \in V$ pro $i > N$, což je spor.

Příklady:

Věta(Poincaré-Bendixon): Neprázdná kompaktní limitní množina toku v rovině, která neobsahuje žádný pevná bod, je uzavřená orbita.

Definice: *Limitní cyklus* je uzavřená orbita γ taková, že buď $\gamma \subseteq \omega(x)$ nebo $\gamma \subseteq \alpha(x)$ pro nějaké $x \notin \gamma$

Důsledek: Neprázdná kompaktní množina, která je positivně nebo negativně invariantní obsahuje buď limitní cyklus nebo pevný bod.

Poznámka: Mezi invariantní množiny patří limitní cykly, α-limitní a ω-limitní množiny, trajektorie, množina nebloudivých bodů,...

Definice: Dva toky φ_t, ψ_t jsou *topologicky konjugované*, pokud existuje homeomorfismus $h : M \to M$ takový, že $h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti: Nechť φ_t, ψ_t jsou topologicky konjugované toky, $h : M \to M$ příslušný homeomorfismus. Potom platí:

- (i) h zobrazuje stabilní rovnovážné stavy na stabilní rovnovážné stavy (a nestabilní na nestabilní)
- (ii) h zobrazuje uzavřené trajektorie na uzavřené trajektorie o stejné periodě
- (iii) h zobrazuje ω-limitní množiny trajektorií na ω-limitní množiny trajektorií (a α-limitní na α-limitní)
- (iv) h zobrazuje homoklinické trajektorie na homoklinické trajektorie (a heteroklinické na heteroklinické)

Poznámka: Trajektorie, které začíná a končí v různých bodech se nazývá *heteroklinická* a trajektorie, která začíná a končí v jednom bodě se nazývá *homoklinická*.

Definice: Dva toky φ_t, ψ_t jsou *topologicky ekvivalentní*, pokud existuje homeomorfismus h, který zobrazuje trajektorie toku φ_t na trajektorie toku ψ_t při zachování jejich orientace (nemusí zachovávat parametrizaci).

$$h \circ \varphi_t(x) = \psi_{\tau_{h(x)}(t)} \circ h(x)$$

Přičemž $\tau_{h(x)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rostoucí homeorfismus takový, že platí

$$\tau_{h(x)}(0) = 0 \text{ a } \lim_{t \to \pm\infty} \tau_{h(x)}(t) = \pm\infty$$

a pokud je $\tau_{h(x)}$ identita, jedná se o konjugaci.

Vlastnosti: Nechť φ_t, ψ_t jsou topologicky ekvivalentní toky, $h : M \to M$ příslušný homeomorfismus. Potom vlastnosti (i), (iii) a (iv) platí stejně jako u konjugace.

(ii) h zobrazuje uzavřené trajektorie na uzavřené trajektorie, přičemž nemusí mít stejnou periodu.