26. Systémy PDR, PDR vyššího řádu a kompatibilita

Definice: Parciální diferenciální rovnice je rovnice obsahující funkci dvou nebo více neznámých a její derivace.

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), ..., u(x), x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, \ldots, F_m)$ je vektor funkcí a $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ je vektor neznámých funkcí, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ a $D^k u$ je k-tá derivace funkce u podle x, tedy $D^k u(x) = \dfrac{\partial^k u(x)}{\partial x^k}$.

Definice: Řád PDR je nejvyšší stupeň derivace, který se v rovnici objevuje.

Definice: (i) Parciální diferenciální rovnice se nazývá *lineární*, pokud má tvar

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x)$$

pro dané funkce $a_\alpha (|\alpha| \leq k)$ a f.
Tato PDR se nazývá *homogenní*, pokud $f = 0$.

(ii) Parciální diferenciální rovnice se nazývá *kvazilineární*, pokud má tvar

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \left(D^{k-1}u, \ldots, Du, u, x\right) D^\alpha u + a_0 \left(D^{k-1}u, \ldots, Du, u, x\right) = 0.$$

(iii) Parciální diferenciální rovnice se nazývá *nelineární*, pokud je nelineární vůči u nebo nějakému $D^k u$.

Definice: *Analytická funkce* je funkce, kterou lze na okolí každého bodu vyjádřit jako součet mocninné řady. *Analytický systém* je systém s analytickými koeficienty.

Kovalevské tvar rovnice: Nechť $(x, t) = (x^1, \ldots, x^{p-1}, t)$ jsou nezávislé proměnné a $\widetilde{u^{(n)}}$ značí všechny parciální derivace u vzhledem k x a t až do řádu n, kromě u^α_{nt}. Potom *Kovalevské tvar rovnice* je

$$u^\alpha_{nt} \equiv \frac{\partial^n u^\alpha}{\partial t^n} = \Gamma_\alpha(y, t, \widetilde{u^{(n)}}), \quad \alpha = 1, \ldots, q. \tag{1}$$

Cauchyho data pro tento systém jsou ve tvaru

$$\frac{\partial^k u^\alpha}{\partial t^k}(x, t_0) = h^\alpha_k(x), \quad \alpha = 1, \ldots, q, k = 0, \ldots, n-1, \tag{2}$$

kde $h^\alpha_k(x)$ jsou analytické funkce pro $t = t_0$ a x v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^{p-1}$.

Věta Cauchyho-Kovalevské: Nechť jsou funkce Γ_α v systému Kovalevské (1) analytické a Cauchyho data $h_k^\alpha(x)$ (2) jsou také analytické funkce pro x v okolí x_0. Potom existuje jedinečné analytické řešení $u = f(x,t)$ pro Cauchyho úlohu (1), (2) definované pro (x,t) v okolí bodu x_0, t_0.

Definice: Systém diferenciálních rovnic n-tého řádu $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ je *lokálně řešitelný* v bodě

$$(x_0, u_0^{(n)}) \in S_\Delta = \{(x, u^{(n)}) : \Delta(x, u^{(n)}) = 0\}$$

pokud existuje hladké řešení systému $u = f(x)$, definované pro x v okolí x_0, které splňuje "okrajovou podmínku" $u_0^{(n)} = pr^{(n)} f(x_0)$. Systém je *lokálně řešitelný*, pokud je lokálně řešitelný v každém bodě S_Δ.

Důsledek: Pokud je Δ analytický systém ve tvaru Kovalevské (1), potom je Δ lokálně řešitelný.

To, že systém není zadaný ve tvaru (1) neznamená, že není řešitelný. Proto nás zajímají systémy, kterou jsou do tvaru Kovalevské převeditelné. Základní podmínkou toho, aby byl systém převeditelný, je stejný počet rovnic jako neznámých. Další podmínky na převeditelnost vyplývají z toho, že transformace mezi systémy musí být lokálně invertibilní a z věty o implicitní funkci.

Systémy převeditelné na tvar Kovalevské: Mějme systém $\Delta_\nu(y, u^{(n)}) = 0$, $\nu = 1, \dots, q$ a transformaci

$$t = \psi(x), \quad x = (x^1, \dots, x^{p-1}) = (y^1, \dots, y^{i-1}, y^{i+1}, \dots y^p),$$

kde ψ je hladká reálná funkce s nenulovým gradientem ve zkoumaném bodě y_0: $\psi(y_0) \neq 0$ a i je vybráno tak, aby $\dfrac{\partial \psi(y_0)}{\partial y^i} \neq 0$ (lokální inverze). Tímto dostáváme systém

$$\tilde{\Delta}_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, q.$$

Tento systém je řešitelný, pokud je matice

$$M_{\alpha\nu} = \frac{\partial \tilde{\Delta}_\nu(x_0, t_0, u_0^{(n)}}{\partial u_{nt}^\alpha} \quad \alpha, \nu = 1, \dots, q$$

není singulární, tedy $detM \neq 0$. (implicitní funkce)

Definice: Nechť Δ je systém n-tého řádu diferenciálních rovnic, který má stejný počet rovnic jako neznámých. Mějme bod $(y_0, u_0^{(n)}) \in S_\Delta$ a vytvořme $q \times q$ matici polynomů

$$M_{\alpha\nu}(\omega) = \sum_{\#J=n} \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_J^\alpha}(y_0, u_0^{(n)}) \cdot \omega_J,$$

kde $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_p)$, $\omega_J = \omega_{j_1}\omega_{j_2}\cdots\omega_{j_n}$ a $\omega = \nabla\psi(y_0)$.
Nenulová p-tice ω definuje *necharakteristický směr* (respektive *charakteristický směr*) pro Δ v $(y_0, u_0^{(n)})$ pokud $M(\omega)$ není singulární (respektive je singulární). Nadrovina $S = \psi(y) = c$, $\nabla\psi \neq 0$ je necharakteristická v $(y_0, u_0^{(n)})$, pokud $\omega = \nabla\psi(y_0)$ určuje necharakteristický směr.

Věta: Pokud je $\Delta(y, u^{(m)}) = 0$ analytický systém diferenciálních rovnic a S je necharakteristická, analytická nadrovina pro Δ v $(y_0, u_0^{(m)})$, potom existuje lokální analytické řešení Cauchyho problému

$$\Delta(y, u^{(m)}) = 0, \quad \frac{\partial^k u}{\partial n^k} = h_k(y), \quad x \in S, k = 0, \ldots n-1$$

v okolí y_0 pro h_k analytické funkce na S a $\partial/\partial n$ normální derivaci ve směru nadroviny S.

Definice: Systém q diferenciálních rovnic $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ o q závidlých proměnných $u = (u^1, \ldots, u^q)$ je *normální* v bodě $(x_0, u_0^{(n)}) \in S_\Delta$ pokud existuje aspoň jeden necharakteristický směr ω pro Δ. Systém je *normální*, pokud je normální v každém bodě S_Δ.

Věta: Systém diferenciálních rovnic je normální v $(y_0, u_0^{(n)})$ právě tehdy, když existuje transformace proměnných $(x, t) = \chi(y)$, pro kterou je systém ve tvaru Kovalevské v okolí bodu $(x_0, t_0) = \chi(x_0)$.

Důsledek: Pokud je systém diferenciálních rovnic analytický a normální v $(y_0, u_0^{(n)})$, pak je lokálně řešitelný v $(y_0, u_0^{(n)})$.

Definice: Nechť Δ je systém diferenciálních rovnic n-tého řádu a $(x_0, u_0^{(n)})$ je okrajová podmínka.

(i) Δ je *přeurčený* v $(x_0, u_0^{(n)})$, jestliže pro nějaké $k \geq 0$ existují homogenní operátory k-tého řádu $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_q$, ne všechny nulové, takové, že lineární kombinace $\sum \mathcal{D}_\nu \Delta_\nu = Q$ všech rovnic v $\Delta^{(k)}$ v bodě $(x_0, u_0^{(n)})$ záleží pouze na derivacích u nejvýše řádu $n+k-1$

a lineární kombinace Q se nevynuluje jako algebraický důsledek $\Delta^{(k-1)}$.

(ii) Δ je *nedourčený* v $(x_0, u_0^{(n)})$, jestliže (i) existuje aspoň jedna množina homogenních operátorů k-tého řádu $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_q$, ne všechny nulové s tím, že $\sum \mathcal{D}_\nu \Delta_\nu = Q$ záleží na derivacích nejvíce $(n+k-1)$-tého řádu v bodě x_0, a (ii) kdykoliv $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_q$ splňuje podmínky v části (i), Q se vynuluje jako algebraický důsledek předchozího prodloužení $\Delta^{(k-1)}$.

Příklad: (Přeurčený systém): Mějme $u = u(x,y)$ funkci dvou neznámých a systém:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f(x,y,u) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= g(x,y,u) \end{aligned} \tag{3}$$

Potom podmínka kompatibility je, že u smíšené derivace u nesmí záležet na pořadí neznámých:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$