38. Hyperbolicita v teorii dynamických systémů

Definice: Dopředná orbita bodu x je množina bodů $x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...$ a značí se $O^+(x)$. Pokud je f homeomorfismus, můžeme definovat plnou orbitu, $O(x)$ jako množinu bodů $f^n(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{Z}$ a zpětnou orbitu, $O^-(x)$ jako množinu bodů $x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), ...$

Definice: Bod x je pevným bodem pro f, pokud platí $f(x) = x$. Bod x je periodickým bodem periody n, pokud $f^n(x) = x$. Nejmenší kladné n, pro které platí $f^n(x) = x$ se nazývá prime period x. Množinu všech periodických bodů periody n značíme $Per_n(f)$ a množinu pevných bodů jako $Fix(f)$. Množina všech iterací periodických bodů tvoří periodickou orbitu.

Definice: Bod je eventuelně periodický periody n, pokud x není periodický, ale existuje $m > 0$ takové, že $f^{n+i}(x) = f^i(x)$ pro $\forall i \geq m$. To znamená, že $f^i(x)$ je periodický pro $i \geq m$.

Browerova věta o pevném bodu: Pro každé spojité zobrazení f na uzavřené kouli existuje bod takový, že $f(x) = x$. Takový bod se nazývá pevný bod funkce f.

Důkaz: $g(x) = f(x) - x$ a věta o střední hodnotě

Definice: Bod x je kritický bod funkce f, pokud $f'(x) = 0$. Kritický bod je nedegenerovaný, pokud platí $f''(x) \neq 0$. Kritický bod je degenerovaný, pokud $f''(x) = 0$.

Příklad: $f(x) = x^2$ má nedegenerovaný kritický bod v 0
$f(x) = x^n$ pro $n > 2$ má degenerovaný kritický bod v 0.

Definice: Nechť p je periodický bod periody n. Bod p je hyperbolický, pokud $|(f^n)'(p)| \neq 1$.

Proposition: Nechť p je hyperbolický pevný bod a $|f'(p)| < 1$. Potom existuje otevřený interval U kolem p takový, že pokud $x \in U$, potom $\lim_{n \to \infty} f^n(x) = p$.

Definice: Nechť p je hyperbolický periodický bod periody n s $|(f^n)'(p)| < 1$. Potom p je přitahující periodický bod (attractor).

Proposition: Nechť p je hyperbolický pevný bod a $|f'(p)| > 1$. Potom existuje otevřený interval U kolem p takový, že pokud $x \in U$, $x \neq p$, potom existuje $k > 0$ takové, že $f^k(x) \notin U$

Definice: Nechť p je pevný bod a $|f'(p)| > 1$. Potom p je odpudivý pevný bod (repulsor).

Věta: Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá. Předpokládejme, že f má periodický bod periody tři. Potom f má periodické body všech ostatních period.

Šarkovského uspořádání: $3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \ldots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \ldots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright \ldots \triangleright 2^n \triangleright 2^{n-1} \triangleright \ldots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$

Věta: Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá. Předpokládejme, že f má periodický bod periody 3. Potom f má periodické body všech ostatních period.

Důkaz: Předpoklady:

1. Pokud I, J jsou uzavřené intervaly a $I \subset J$ a $f(I) \supset J$, potom f má pevný bod v I (věta o střední hodnotě)
2. Nechť $A_0, A_1, A_2 ...$ jsou uzavřené intervaly a platí $f(A_i) \supset A_{i+1}$ pro $i = 0...n-1$ Potom existuje aspoň jeden podinterval $J_0 \subset A_0$, který se zobrazí na A_1..... Existuje bod $x \in A_0$ takový, že $f^i(x) \in A_i$ pro každé i. Řekneme, že $f(A_i)$ pokrývá A_{i+1}

Šarkovského věta: Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá. Předpokládejme, že f má periodický bod s prime periodou k. Pokud $k \triangleright l$ ve výše zmíněném uspořádání, potom f má také periodický bod periody l.

Příklady:

1. Zobrazení tent:
   $$T(x) = \begin{array}{ll} 2x & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 2(1-x) & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{array}$$
2. Iracionální rotace na kruhu:
   $f_\theta = x + \theta, \theta \in \mathbb{I}$
   každý bod má hustou orbitu
   minimální $\Rightarrow$ transitivní systém
3. Zobrazení shift:
   $\sum_2 = \{s = s_0 s_1 s_2 ... | s_j = 0 \vee 1\}$
   $\sigma : \sum_2 \to \sum_2$ spojité zobrazení
   $\sigma(s_0 s_1 s_2 ...) = (s_1 s_2 s_3 ...)$
   $d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$ metrika ma $\sum_2$

shift - Morseho posloupnost generuje minimální množinu