25. PDR prvního řádu

Definice: Parciální diferenciální rovnice je rovnice obsahující funkci dvou nebo více neznámých a její derivace.

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x)...u(x), x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

kde $D^k u$ je k-tá derivace funkce u podle x, tedy $D^k u(x) = \dfrac{\partial^k u(x)}{\partial x^k}$. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, F je funkce a $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ je neznámá, $u = u(x)$.

Definice: Řád PDR je nejvyšší stupeň derivace, který se v rovnici objevuje.

Definice: Parciální diferenciální rovnice prvního řádu je tohoto tvaru:

$$F(Du, u, x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

kde

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R},$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ je neznámá, $u = u(x)$.

Definice: Rozlišujeme okrajové podmínky:

(i) Dirichletova podmínka:

$$u = g \text{ na } \partial\Omega$$

(ii) Neumannova podmínka:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ na } \partial\Omega$$

(iii) Newtonova podmínka:

$$A\frac{\partial u}{\partial n} + Bu = g \text{ na } \partial\Omega,$$

kde $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ značí derivaci podle normály k hranici oblasti Ω a A, B dané konstanty takové, že $A^2 + B^2 \neq 0$

Aplikace: fyzika (dynamika - kanonické transformace, mechanika - zachování hmoty, optika - vlnění)

Definice: (i) Parciální diferenciální rovnice se nazývá *lineární*, pokud má tvar

$$a^1(x)Du(x) + a^0u(x) = f(x)$$

pro dané funkce $a_i, i = 0, 1$ a f.
Tato PDR se nazývá *homogenní*, pokud $f = 0$.

(ii) Parciální diferenciální rovnice se nazývá *kvazilineární*, pokud má tvar

$$\sum_{i=1}^{n} a^i(x_1, \ldots, x_n, u)Du(x) + a^0(x_1, \ldots, x_n, u) = 0..$$

(iii) Parciální diferenciální rovnice se nazývá *nelineární*, pokud je nelineární vůči u nebo $D^k u$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$.

Definice: Nechť

$$(D_a u, D^2_{xa}u) := \begin{pmatrix} u_{a_1} & u_{x_1 a_1} & \ldots & u_{x_n a_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{a_n} & u_{x_1 a_n} & \ldots & u_{x_n a_n} \end{pmatrix}$$

Funkce $u = u(x, a)$ je *úplný integrál* v $\Omega \times A$, pokud $u(x, a)$ řeší (1) pro každé $a \in A$ a

$$rank(D_a u, D^2_{xa}u) = n$$

pro $x \in \Omega$ a $a \in A$.

Definice: Nechť $u = u(x, a)$ je C^1 funkce $x \in U, a \in A$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$ a $A \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny. Mějme vektorovou rovnici

$$D_a u(x, a) = 0 \quad (x \in U, a \in A)$$

Předpokládejme, že můžeme najít její řešení pro parametr a jako C^1 funkci x, $a = \phi(x)$, takže

$$D_a u(x, \phi(x)) = 0 \quad (x \in U)$$

Potom

$$v(x) := u(x, \phi(x)) \quad (x \in U)$$

nazýváme *obal (envelope) funkcí* $\{u(\cdot, a)\}_{a \in A}$, nebo *singulární integrál.*

Věta: Předpokládejme, že pro každé $a \in A$ je funkce $u = u(\cdot, a)$ řešením parciální diferenciální rovnice. Předpokládejme dále, že obal v existuje a je C^1 funkce. Potom v je také řešením PDR (1).

Definice: Mějme $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ otevřenou množinu a libovolnou C^1 funkci $h : A' \to \mathbb{R}$ takovou, že graf h leží v A. Dále $a = (a_1, \ldots, a_n) = (a', a_n)$ pro $a' = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. *Obecný integrál* (závisející od libovolné dostatečně hladké funkce h) je obal $v' = v'(x)$ funkcí

$$u'(x, a') = u(x, a', h(a')) \quad (x \in U, a' \in A'),$$

pokud tento obal existuje a je C^1.

Metoda charakteristik je metoda, která řeší (1) pomocí použití systému ODR. Nechť je u řešením (1), nechť $x \in \Omega$. Snažíme se spočítat $u(x)$ pomocí nějaké křivky ležící v Ω, která spojuje x a $x^0 \in \Gamma$. Jelikož z okrajové podmínky máme $u = g$ na Γ, známe hodnotu $u(x^0)$.

Charakteristický systém: Mějme $x(s) = (x^1(s), x^2(s), \ldots, x^n(s))$ a $s \in I \subset \mathbb{R}$ a předpokládejme, že u je C^2 řešení (1). Definujeme

$$p(s) := Du(x(s)),$$

$p(s) = (p^1(s), p^2(s), \ldots, p^n(s))$, kde $p^i(s) = u_{x_i}(x(s))$.
Potom *charakteristický systém* je $2n + 1$ ODR prvního řádu pro $F = F(p(s), z(s), x(s))$

$$\begin{aligned} \dot{p}(s) &= -D_x F - D_u F \cdot p \\ \dot{u}(s) &= D_p F \cdot p \\ \dot{x}(s) &= D_p F \end{aligned} \tag{2}$$

Věta: Nechť $u \in C^2(\Omega)$ je řešení nelineární PDR prvního řádu (1) v Ω. Předpokládejme, že $x(\cdot)$ je řešením třetí charakteristické rovnice (2), kde $p(\cdot) = Du(x(\cdot))$. Potom $p(\cdot)$ je řešením první charakteristické rovnice a $u(x(\cdot))$ je řešením druhé charakteristické rovnice pro takové s, že $x(s) \in \Omega$.