Teorie her

letní semestr 2022/2023

Michaela Záškolná

1 Úvod

V rámci matematického programování se rozhodujeme o optimálním řešení s nadhledem, známe veškeré informace. V teorii her řešíme situace, kdy nemáme úplné informace a rozhodujeme se v každém kroku. Lze říci, že v rámci matematického programování optimalizujeme výsledek, v teorii her optimalizujeme postup. Příkladem, kde je tento rozdíl hezky vidět, je hledání optimální cesty dostavníku.

Definice:

Hráčem nazýváme každého účastníka rozhodovací situace. Hráč, který logicky analyzuje situaci a volí strategie tak, aby optimalizoval svou výhru, se nazývá *inteligentní*. Neinteligentním hráčem nazýváme náhodný mechanismus (příroda). *p-inteligentní* hráč - p určuje stupeň inteligence (0 - náhodný, 1 - inteligentní). *Hra* je soubor pravidel a podmínek, které určují strategie, v jakém pořadí je volí a jaká je jejich výhra. Hrou se někdy rozumí matematický model rozhodovací situace. Způsob, jakým se hráč rozhoduje, se nazývá *strategie*. *Optimální strategie* zaručuje hráči co nejvyšší výhru nezávisle na tazích protihráče. Na konci každé hry se uskutečňuje *platba (výplata, výhra*, což je peněžní platba nebo vyhodnocení dosažených bodů.

Teorie her se zabývá určením optimální strategie, se kterou dosáhne účastních co nejvyšší výhry.

Náležitosti teorie her

- minimálně dva hráči
- střet zájmů
- každý hráč zná množinu svých i soupeřových strategií
- každý hráč dokáže ocenit efektivitu strategií
- každý hráč se rozhoduje nezávisle na rozhodnutí soupeře
- aspoň jeden hráč je "inteligentní"- volí optimální řešení

Klasifikace her

- podle počtu účastníků: dva, více, nekonečno
- podle počtu alternativ v každém tahu: konečné, nekonečné

- podle příslušnosti k oblasti společnosti: salonní, ekonomické, vojenské
- podle možnosti a stupně spolupráce: kooperativní, nekooperativní
- podle charakteru výher: konstantní součet, nekonstantní součet
- podle množství informací: hry s dokonalou nebo nedokonalou informací
- podle pravděpodobnosti na výhru: spravedlivé, nespravedlivé
- podle inteligence hráčů
- podle znalosti mechanismu volby tahů neinteligentním hráčem: hry s neurčitostí, hry s rizikem (známe pravděpodobnosti volby tahů neinteligentního hráče)

John von Neumann (1928) - Věta o minimaxu

2 Hra ve standartním tvaru

Hra ve standartním tvaru má tři náležitosti: množina hráčů, množina strategií a výplatní funkce
Značení:
množina hráčů: $Q = \{1, 2 \dots N\}$
množina strategií: $X_i, i \in \{1, 2 \dots N\}$
výplatní funkce: $M_i : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N \to \mathbb{R}$

Domácí úkol (2.3.2023): kouknout na optimální strategie
Odpověď:

3 Nashova rovnováha vs Paretovo optimum

Nashova rovnováha: Koncept řešení nekooperativních her více hráčů, jedná se o situaci, kdy žádný z hráčů nemůže změnou své strategie vylepšit svou situaci. Hledání Nashovy rovnováhy je ekvivalentní s hledáním sedlového bodu výplatní matice.

Paretovo optimum: Je to takový stav, kdy žádný hráč nemůže dosáhnout lepšího postavení bez toho, že by se naopak postavení někoho jiného zhoršilo. Je to tedy jakýsi rovnovážný stav, kdy, pokud se někdo chce mít ještě lépe, než na tom je, může tak učinit jen na úkor někoho jiného. (není spravedlivé, nezajišťuje rovnoměrné rozdělení - když mám všechno a ty nic, při změne si vždy přihorším)

Vězňovo dilema: Koordinační hra o dvou hráčích, kteří se rozhodují, zda zradit a vypovídat, nebo mlčet. Kdyby oba mlčeli, tak nebudou usvědčeni, ale kdo promluví první, dostane lepší podmínky. V tomto případě se zde nachází pouze jedna Nashova rovnováha a oba hráči si zvolí možnost zradit, protože v jakékoliv situaci se vyplatí hráči změnit strategii z mlčení na zradu a vždy si svou situaci zlepší. Paretovo optimum je v této situaci stav, kdy by oba vězni mlčeli.

4 Maticové hry

(chybí hodina 9.3 - část 2. prezentace)
rozdílová matice: $M = M_1 - M_2$
součtová matice: $K = M_1 + M_2$
$M_1 = \frac{1}{2}(K + M)$ $M_2 = \frac{1}{2}(K - M)$

5 Optimální strategie

sedlový bod - minimax - hodnota, která je nejmenší na řádku a zároveň největší ve sloupci
Hra s ryzími strategiemi nemusí mít vždy řešení.
Smíšené rozšíření každé maticové hry má vždy řešení.
Minimax (sedlový bod):
$\max_i\{\min_j\{a_{ij}\}\} = \min_j\{\max_i\{a_{ij}\}\}$

6 Hra v rozvinutém tvaru

Náležitosti: strom hry, informační množiny
Strom hry:
Strukturu konečné hry N osob v rozvinutém tvaru znázorňujeme pomocí speciálního stromu (hierarchický graf).
Y_X - koncové pozice
q_0 - výchozí pozice

Informační množiny:
Informační množina je podmnožina možných pozic hráče vytvořených na

základě toho, kolik informací daný hráč má. $Y_{is} \subset Y_i, s = s_i = 1...S_i$, kde $1 \leq S_i \leq |Y_i|$ je počet ...
základní vlastnosti viz prezentace

Nepovinný domácí úkol (na 6.4.2023): co znamená v_{is} a V_{is}?
Odpověď: v_{is} je strategie i-tého hráče v jeho s_i-té informační množině.
V_{is} je počet alternativ i-tého hráče v jeho s_i-té informační množině.

7 Signální hra

Hra s dokonalou informací je taková hra, ve které mají všichni hráči informace o všech tazích, které provedli hráči před ním.(týká se tahů)
Hra s nedokonalou informací je každá hra, která není hrou s dokonalou informací.
Hra s úplnou informací je taková hra, v níž jsou všechny informace a všech hráčích dostupné všem ostatním hráčům. (týká se hráčů - každý hráč zná strategie a výplatní pásky všech hráčů)
Hra s neúplnou informací je hra, která není s úplnou informací.

Signální hra je hra s nedokonalou informací.

Množina historií, po které i-tý hráč hraje, označujeme H_i, tu rozdělíme na soubor informačních množin - *informační rozdělení* Množinu historií faktorizujeme informačními množinami a dostaneme informační rozdělení (=faktorizace množiny historií)
Systém úsudků u her v rozvinutém tvaru je funkce, která určuje pro každou množinu informací pravděpodobnostní rozdělení přes historie v této množině informací.
Behaviorální strategie je funkce určující ke každé z jeho množin informací Ii pravděpodobnostní rozdělení tahů v $A(I_i)$ s vlastností, že každé pravděpodobnostní rozdělení je nezávislé na jakémkoli jiném rozdělení.
Odhad je kombinace systému úsudků a behaviorální strategie.
požadavky, aby byl odhad rovnováhou:

- postupná racionalita (v každém tahu)
- konzistentnost úsudků se strategiemi

nepovinný domácí úkol na 27.4 - rozklíčovat tuto funkci (H_i něco přiřazuje)
Odpověď: $f : A \rightarrow B$
$A = \bar{H}_i$, $B = I_i$

$f(I_i) = v_{s_i}$

Strategie i-tého hráče je funkce, která určí ke každé množině informací i-tého hráče tah $A(I_i)$. *Smíšená strategie* i-tého hráče v rozvinutých hrách je pravděpodobnostní pravděpodobnostní rozdělení přes strategie.

Základní popis signální hry dvou hráčů

- informovaná a neinformovaná strana - vysílač/odesílatel (ozn. S) a příjemce (ozn. R)
- 1. část: Určení typu $t \in T$ odesílatele
- 2. část: Odesílatel vybere svůj tah $m \in M$ (pozorováno příjemcem)
- 3. část: Příjemce vybere svůj tah $r \in R$
- Výplatní funkce závisí na odesílatelově typu a vybraném tahu obou hráčů (u her typu screening games a cheap talk games je nezávislá na zprávách mezi hráči)

$$u_S = u_S(t, m, r) \quad u_R = u_R(t, m, r)$$

Typy rovnováhy - na základě vlastností zobrazení $m(t)$ - tah odesílatele

Separating equilibrium: Rovnováha je oddělená, pokud je m 1:1. ($t \neq t' \Rightarrow m(t) \neq m(t')$ - injektivní zobrazení) - Příjemce je schopen jednoznačně identifikovat typ odesílatele z tahu.

Semi-pooling equilibrium: Rovnováha je polojednotná, pokud m není 1:1 (není injektivní, ale ani konstantní)

Pooling equilibrium: Rovnováha je jednotná, pokud každý typ vybere stejný tah (m je konstantní zobrazení)

dobrovolný úkol na 4.5.2023 - screening games a cheap talk games

screening games Upřímnost není ideální, jedna strana je "vyslechnuta" (screened)

cheap talk games Je komunikace, která je zdarma, nezavazující (nelimituje možnosti volby žádné ze stran) a neověřitelná (třetí stranou). Hru nemusí ovlivňovat.

Marketingové náklady jako signál kvality
reklama, ochutnávky jsou signálem kvality (viditelné marketingové náklady)

Označení

- $i \in \{1, 2, 3 \ldots\}$ - pořadové číslo sledovaného období
- $k_i \in \{H_i, L_i, \ldots\}$ - kvalita zboží v i-tém období (subjektivní z pohledu zákazníka)
- c_i^k - náklady na produkci zboží v i-tém období ve kvalitě k_i (jeden kus)
- p_i^k - cena zboží v i-tém období v kvalitě k (jeden kus)
- E_i^k - viditelné marketingové náklady spojené se zbožím s kvalitou k, vydané v i-tém období (jeden kus)
- $\sum_i E_i^k$ - viditelné náklady přes několik období
- p_i^{H*} - zákazníkův odhad přiměřené ceny zboží v i-tém období, stanovený na základě znalosti E_i a cen srovnatelného zboží
- E_i^* - zákazníkem očekávaná výše nákladů viditelně vydaných na marketingové účely v i-tém období (jeden kus)
- $\sum_i E_i^*$ - celková zákazníkem očekávaná výše nákladů viditelně vydaných na marketingové účely v i-tém období (jeden kus)

Příklad:
Předpokládejme, že s pravděpodobností π se jedná o firmu, která vyrábí zboží s kvalitou $H > 0$ a s pravděpodobností $1 - \pi$ jde o firmu, která vyrábí výrobky s kvalitou $L \approx 0$ a $L < H$

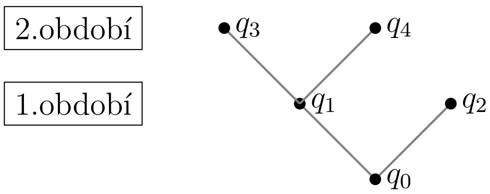
1.období

- ochutnávka - $E_1 \neq 0$
- cena výrobku p_1
- zákazník zjistí kvalitu zboží

2.období

- $E_2 = 0$
- volba ceny: p_2^H nebo p_2^L

zákazník ví: E_1, p_1
zákazník neví: kvalita zboží
firma zná vše
Strom hry:



vlevo: koupí, vpravo: nekoupí
výplatní funkce:
q_1:
zákazník: $k_1 - p_1^k$
firma: $p_1 - c^k - E_1$
q_2:
zákazník: 0
firma: $-c^H - E_1$ nebo $-c^L - E_2$
q_3:
zákazník: $k_1 - p_1^k + k_2 - p_2^k$
firma: $p_1^k + p_2^k - 2c^k - E_1$
q_4:
zákazník: $k_1 - p_1^k$
firma: $p_1 - 2c^k - E_1$
Předpokládejme, že $H - c^H > 0$. Pak existuje taková cena výrobku p^H, pro kterou platí $H \geq p^H > c^H > 0$. Důsledek: Cena $p^H = H$ přináší firmě zisk.
Rozdíl mezi výrobkem a zbožím: výrobek je v podniku vyroben nebo upraven, zboží projde podnikem beze změny

Domácí úkol (na 11.5): změna způsobu značení, hledání chyb v prezentaci 5 (strana 22/27 - zákazník se rozhoduje, jestli zboží nakoupí i v druhém období)

8 Postupná rovnováha

Domácí úkol (na 18.5): doplnit výplatní funkce q_4
Úloha: Nalezněte podmínky, za nichž má hra slabé postupné řešení, v němž výrobce kvalitního zboží viditelně investuje peníze v prvním období, zatímco výrobce s nižší kvalitou nikoliv. Nejlépe i graficky.

1. **Pohled firmy:**

   (a) TYP H

Podmínky:	Výplatní funkce firmy
$E_1 = E^*$ a $p_1 = p^{H*}$ a $p_2^H \leq H$	$p_1 + p_2^H - 2c^H - E_1$
$E_1 = E^*$ a $p_1 = p^{H*}$ a $p_2^H > H$	$p_1 - 1c^H - E_1$
jiná volba pro E_1 a p_1	$-c^H - E_1$

   Podmínka postupné rovnováhy:

   $$p^{H^*} - E^* + H - 2c_H \geq 0$$

   Firma není ztrátná

   (b) TYP L

Podmínky:	Výplatní funkce firmy
$E_1 \neq E^*$ a $p_1 \leq p^{H*}$	$-c^L - E_1$
$E_1 = E^*$ a $p_1 > p^{H*}$	$-c^L - E_1$
jiná volba pro E_1 a $p_1(E_1 = E^*$ a $p_1 \leq p^{H*})$	$p_1 - c^L - E_1$

   Zákazník si zboží nekoupí v 2. kole, protože zjistí, že zboží není kvalitní (nenastavujeme p_2)

   Podmínka postupné rovnováhy:

   $$p^{H^*} - E^* \leq 0$$

   Firma není ztrátná

   Domácí úkol (na 25.5.2023): Je tato podmínka v pořádku? Vypadá to, že to nezávisí na výrobní ceně.

   Odpověď: Ano, je v pořádku, protože se předpokládá $c^L \approx 0$

   V podmínce se objevuje p^{H^*} místo očekávaného p^{L^*} - firma blafuje.

   $$p^{H^*} - (E^* + c^L) \leq 0$$

   $$p^{H^*} - E^* - c^L \leq 0$$

2. **Pohled zákazníka:**

   (a) TYP H

Podmínky:	Výplatní funkce zákazníka
$E_1 = E*$ a $p_1 \leq p^{H*}$ a $p_2^H \leq H$	a)$H - c^{H^*}$nebo b)0
jiná volba pro E_1 a p_1	a)$p_1 - c^L - E_1$nebo b)0

   V prvním případě zákazník věří, že se jedná o výrobek vyšší kvality (typ H). V druhém věří, že jde o výrobek nižší kvality (typ L).

   V případě a) zboží koupí, v případě b) zboží nekoupí.

Podmínka postupné rovnováhy:
podmínky: $E_1 = E^*$ a $p_1 \leq p^{H*}$

$$H - p^{H^*}$$

Za jiných podmínek dojde k rovnováze, pokud zákazník nic nekoupí.

3. **Shrnutí:**
Hra má řešení nazývané slabou postupnou rovnováhou (weak sequential equilibrium) právě tehdy, když

$$E^* + 2c^H - H \leq p^{H^*} \leq min\{E^*, H\}$$