Stochastické procesy

zimní semestr 2022/2023

Michaela Záškolná

1 Úvod

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, A, P) a množinu $T \subset \mathbb{R}$

Ω	množina elementálních jevů
$\mathcal{F}$	σ-algebra
$A \in \mathcal{F}$	jev
P	pravděpodobnost

Náhodná veličina je zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Náhodným procesem pak nazýváme množinu $\{X_t, t \in T\}$, kde X_t jsou náhodné veličiny z $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Prvky z množiny T se obvykle interpretují jako čas.

2 Náhodná procházka

Jednoduchá náhodná procházka je jeden z nejjednodušších stochastických procesů.
Procházka po přirozených číslech:
$\Omega = \{+1, -1\}$
$P(1) = p, P(-1) = q = 1 - p$
X_n - hodnota n-tého hodu (nezávislá od předchozího hodu)
S_n - jmění po n hodech

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$
$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

(Pascalův trojúhelník, Bellova křivka)
Po dostatečně velkém počtu opakování lze předpokládat, že $S_n = 0$.
(Gambler's ruin - hráč s konečným počtem peněz musí vždy prohrát proti kasinu s "nekonečným"počtem peněz - vychází z náhodné procházky a toho, že hráč se nutně dostane na nulu)
"A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever"- v 1 a 2 dimenzích se náhodnou procházkou vždy v konečném počtu kroků dostaneme na začátek, ve 3 a více dimenzích to přestává fungovat.
Vlastnosti jednoduché procházky:

- symetrická: $p = q = \frac{1}{2}$
- prostorově homogenní: $P(S_n = j|S_0 = a) = P(S_n = j + b|S_0 = a + b)$
- časově homogenní: $P(S_n = j|S_0 = a) = P(S_{m+n} = j + b|S_m = a + b)$
- Markovova vlastnost: $P(S_{m+n} = j|S_0, S_1, \dots S_m) = P(S_n = j + b|S_m)$

3 Princip reflexe

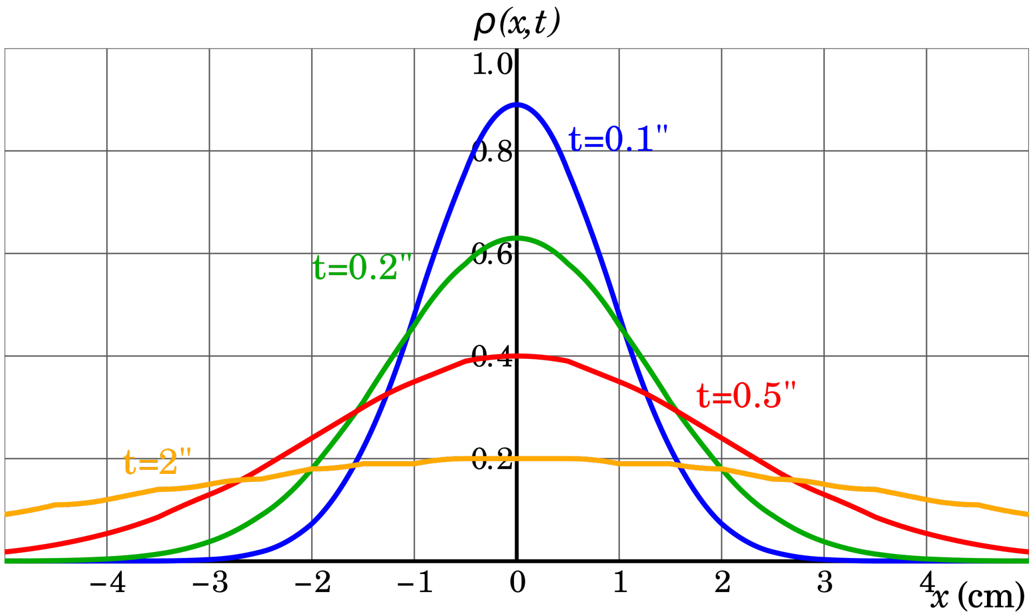
Věta: Nechť $a, b > 0$, potom $N_n^0(a,b) = N_n(-a,b)$.

4 Markovova vlastnost

Proces X je Markovův řetězec, pokud splňuje Markovovu vlastnost: $P(X_n = s|X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = s|X_{n-1} = x_{n-1})$

5 Brownův pohyb

Brownův pohyb je náhodný pohyb částic v kapalině něbo plynu. Při zkoumání vzdálenosti částice od počátku dostaneme Bellovu křivku, stejně jako u náhodné procházky.



Brownův pohyb lze získat pomocí Weinerova procesu, který lze charakterizovat těmito podmínkami:

1. $W_0 = 0$
2. W má přírůstky nezávislé na poloze s normálním rozdělením
3. W je spojité

Brownův pohyb je fraktál

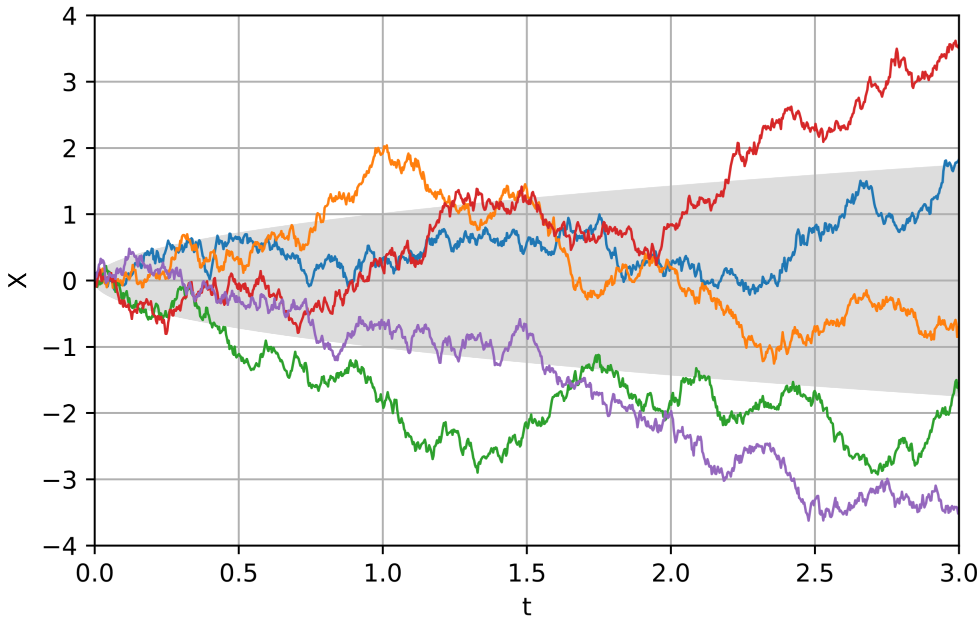
6 Piet Mondrian (1872–1944)

Piet Mondrian byl Holandský malíř a jeden z největších umělců 20. století. Je znám jako jeden z průkopníků abstraktního umění, jeho obrazy se skládají z jednoduchých geometrických prvků.

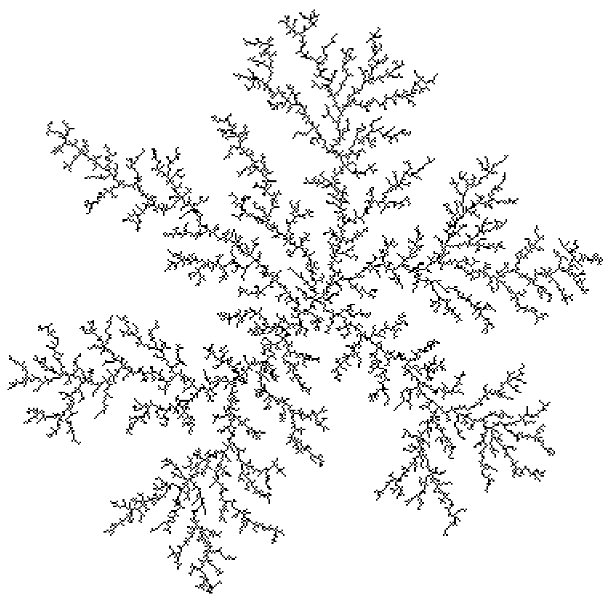
"Art is higher than reality and has no direct relation to reality. To approach the spiritual in art, one will make as little use as possible of reality, because reality is opposed to the spiritual. We find ourselves in the presence of an abstract art. Art should be above reality, otherwise it would have no value for man."

7 Mondrianův proces

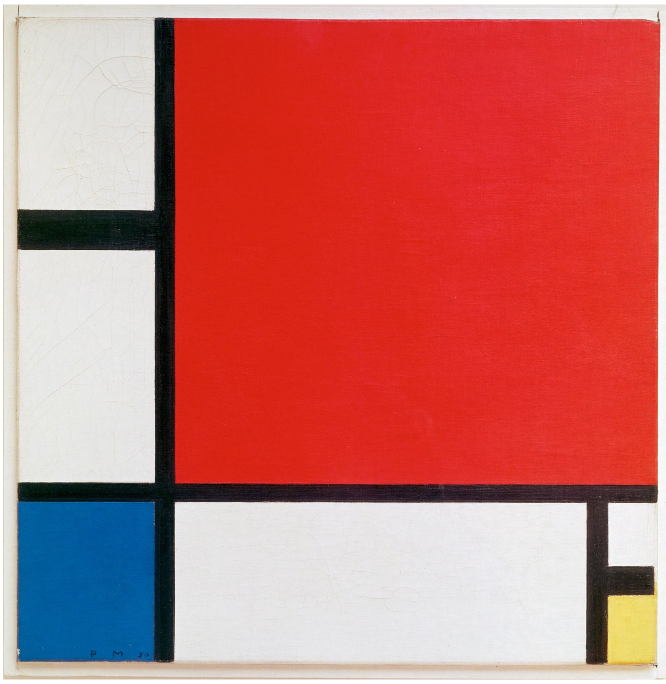
Stable under iterated tessellation (STIT) je stochastický proces, který tvoří rekursivní dělení prostoru řezy, jejichž směr je nezávislý. Případ náhodných řezů ve směrech os je známý jako Mondrianův proces.



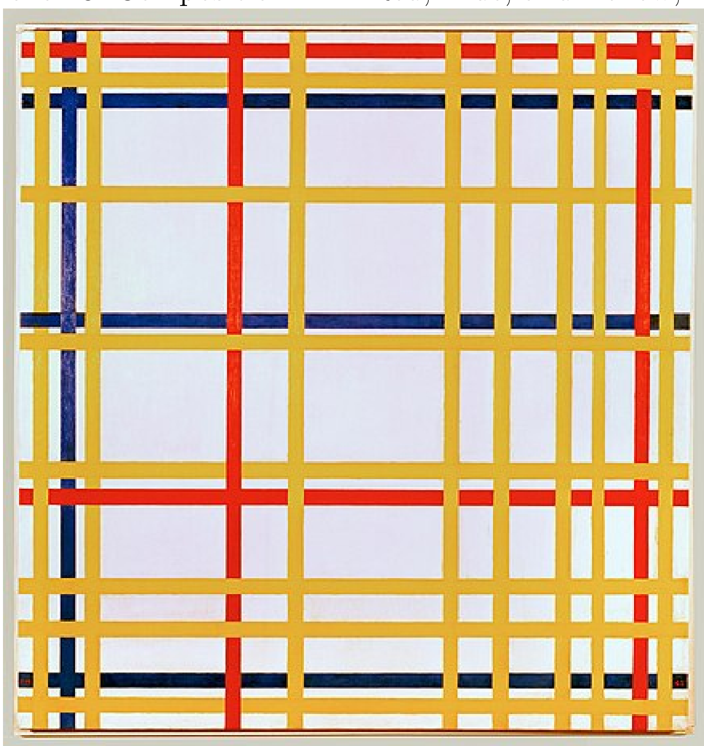
Obrázek 1: Weinerův proces v jedné dimenzi



Obrázek 2: Weinerův proces ve dvou dimenzích



Obrázek 3: Composition II in Red, Blue, and Yellow, 1930



Obrázek 4: New York City, 1942