Obecná topologie

zimní semestr 2021/2022

Michaela Záškolná

1 Základy obecné topologie

Definice: *Topologie* na množině X je množina $\mathcal{T}$ jejich podmnožin s následujícími vlastnostmi:

- A,B $\in \mathcal{T} \Rightarrow$A$\cap$B $\in \mathcal{T}$
- $A_\alpha \in \mathcal{T}\ \forall\alpha \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}$
- $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$

Prvky množiny $\mathcal{T}$ se nazývají *otevřené množiny*. Doplňky otevřených množin se nazývají *uzavřené množiny*.

Příklady:

- *Antidiskrétní (triviální) topologie:* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
- *Diskrétní topologie:* $\mathcal{T} = 2^X$

Definice: Okolím bodu a v topologickém prostoru je libovolná otevřená množina obsahující a.

Definice: Topologický prostor se nazývá *Hausdorffův*, pokud pro každé dva různé body existují disjunktní okolí. Jinak řečeno $\forall x, y \in X, x \neq y\ \exists U_x$ okolí x a U_y okolí $y : U_x \cap U_y = \emptyset$

Definice: *Báze topologie* je systém $\mathcal{B}$ otevřených množin takový, že každá otevřená množina je sjednocením prvků z $\mathcal{B}$:

$$U \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists B_\alpha \in \mathcal{B} : U = \bigcup_\alpha B_\alpha$$

Subbáze topologie je systém $\mathcal{S}$ otevřených množin takový, že jejich konečné průniky tvoří bázi:

$$\{\bigcap_{j=1}^{n} U_j, U_j \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}\}$$

Věta: Pro každou bázi $\mathcal{B}$ platí

(i) $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} = X$

(ii) $U_1, U_2 \in \mathcal{B} a x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists U_3 \in \mathcal{B} : U_3 \subset U_1 \cap U_2$

Naopak každý systém $\mathcal{B}$ podmnožin X splňující tyto dva axiomy je bází nějaké (jednoznačně určené) topologie na X.

Definice: *Dlouhou posloupností* v množině X nazýváme soubor jejích prvků $\{x_n\}_{n \in \mathcal{N}}$, indexovaný nějakou usměrněnou množinou $\mathcal{N}$.

Věta: Nechť X, Y jsou topologické prostory, $f : X \to Y$ je zobrazení a $x \in X$. Pak jsou tato tvrzení ekvivalentní:

(i) f je spojité v x

(ii) pro každou dlouhou posloupnost $x_n \to x$ v X platí

Věta: Množina $\mathcal{F}$ v topologickém prostoru je uzavřená, právě tehdy když, každá dlouhá posloupnost, která má limitu a všechny její členy leží v $\mathcal{F}$, má limitu v $\mathcal{F}$.

Definice: Nechť A je podmnožina topologického prostoru X.

(1) *Uzávěr* Ā množina A je průnik všech uzavřených množin obsahujících A:

$$\overline{A} := \bigcap_{A \subset F} F$$

(2) *Vnitřek* $IntA$ množiny A je sjednocení všech otevřených množin obsažených v A:

$$IntA := \bigcup_{U \subset A} U$$

(3) *Hranice* ∂A množiny A je množina všech bodů takových, že každé jejich okolí obsahuje jak bod z A, tak bod mimo A:

$$x \in \partial A \Leftrightarrow [U\text{okolí } x \Rightarrow (U \cap A \neq \emptyset \ \& \ U \setminus A \neq \emptyset)]$$

2 Metrické prostory

Definice: Metrikou na množině X nazýváme zobrazení $d : X \times X \to [0; \infty)$ takové, že:

(1) $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in X$ trojúhelníhová nerovnost

(2) $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$ symetričnost

(3) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Množina X spolu s metrikou d tvoří *metrický prostor* (X, d).

Příklady:

- $(\mathbb{R}, d), d := |x - y|$
- $(\mathbb{R}^n, d), d := \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$
- $(\mathbb{R}^n, d), d := \max_j |x_j - y_j|$

Definice: Nechť X je metrický prostor s metrikou d. Otevřenou koulí se středem v $x \in X$ a poloměrem $r > 0$ nazýváme množinu

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Uzavřenou koulí nazýváme množinu

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

Věta: Definujme na metrickém prostoru X následující systém $\mathcal{O}$ jeho podmnožin: $U \subset X$ patří do $\mathcal{O}$ právě tehdy když spolu s každým svým bodem x obsahuje také nějakou otevřenou kouli $B(x, r)$. Pak $\mathcal{O}$ je topologie na X. (indukovaná metrikou)

Věta: Posloupnost bodů x_n metrického prostoru konverguje (v indukované topologii) k bodu x právě tehdy, když posloupnost čísel $d(x_n, x)$ konverguje k nule:

$$x_n \to x \Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0$$

Věta: Nechť X, Y jsou dva metrické prostory a $f : X \to Y$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) f je spojité v $x \in X$

(ii) $x_n \to x \in X \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \in Y$

(iii) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$

Věta: Nechť X, Y jsou dva metrické prostory a $f : X \to Y$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) f je spojité na X

(ii) vzor libovolné otevřené množiny v Y při zobrazení f je otevřená množina v X

Definice: Posloupnost x_n bodů v metrickém prostoru X se nazývá *Cauchyovská*, pokud $\forall \epsilon > 0 \exists N : m, m \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$.
Opačná implikace platí pouze pro úplné prostory.

3 Zúplnění metrického prostoru

Definice: Nechť $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ jsou dva metrické prostory. $f : X_1 \to X_2$ se nazývá *izometrie* pokud $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))\ \forall x, y \in X_1$. Metrické prostory jsou izometrické, pokud mezi nimi existuje izometrie.

Definice: Izometrie $f : X_1 \to X_2$, kde X_2 je úplný metrický prostor, a taková, že $f(X_1)$ je hustá množina v X_2, se nazývá *zúplnění metrického prostoru* X_1.

Hausdorffova věta o zúplnění metrického prostoru: Každý metrický prostor je izometrický s podprostorem úplného metrického prostoru.

Důkaz:

(X, d) metrický prostor
Nechť $S = \{x_i\}$, $T = \{y_i\}$ jsou dvě Cauchyovské posloupnosti v X.
$\forall i, j$ platí $d(x_i, y_i) \leq d(x_i, x_j) + d(x_j, y_j) + d(y_j, y_i)$
takže $d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j) \leq d(x_i, x_j) + d(y_j, y_i)$
podobně $d(x_j, y_j) - d(x_i, y_i) \leq d(x_i, x_j) + d(y_j, y_i)$
Proto $|d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j)| \leq d(x_i, x_j) + d(y_j, y_i)\ \forall i, j \in \mathbb{N}$
Nechť $\epsilon > 0$ je libovolné. Potom $\exists n_0 : \forall i, j \geq n_0 : d(x_i, x_j) < \frac{\epsilon}{2}$ a $d(y_i, y_j) < \frac{\epsilon}{2}$ $\Rightarrow |d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \Rightarrow \{d(x_i, y_i)\}$ je Cauchyovská v $\mathbb{R}$ a z úplnosti $\mathbb{R}$ plyne, že $\exists \lim_{i\to\infty} d(x_i, y_i) = d'(S, T)$.

Pomocí této funkce d' definujeme na množině všech Cauchyovských posloupností relaci ekvivalence: $d'(S, T) = 0 \Leftrightarrow S \sim T$. Evidentně je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Položme $d''([S], [T]) = d'(S, T)$. Ukažme nejdříve, že d'' nezáleží na volbě reprezentantů tříd: Mějme S', T' jiné reprezentanty tříd $[S], [T]$.
$d'(S', T') \leq d'(S', S) + d'(S, T) + d'(T, T') = d'(S, T)$ opačná nerovnost platí také a proto $d'(S', T') = d'(S, T)$

Označme ϵX množinu všech tříd Cauchyovských posloupností v metrickém prostoru X. d'' je metrika na ϵX:

1. $d'' \geq 0$
2. $d''([S], [T]) = d''([T], [S])$
3. $d''([S], [T]) = d''([S], [U]) + d''([U], [T])$ (limitním přechodem z d', $d'(S, T) \leq d'(S, U) + d'(U, T)$ a to platí z $d(x_i, y_i) \leq d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i)$)

Teď ukážeme, že $(\epsilon X, d'')$ je úplný metrický prostor.
Nechť $[S_1], [S_2], ...$ je libovolná Cauchyovská posloupnost v ϵX. Zvolíme reprezentanta třídy $[S_i]$ a označíme $S_i = \{x_{i,j}\}$. $\Rightarrow \forall i \forall \epsilon = \frac{\epsilon}{3} > 0\ \exists n_i : \forall k, l \geq n_i : d(x_{i,k}, x_{i,l}) < \frac{\epsilon}{3} (*)$
Definujeme $S = (x_{1,n_1}, x_{2,n_2}, x_{3,n_3} ...)$.Ukážeme, že S je Cauchyovská v X a $[S_1], [S_2], ..., [S_n]$ konvergují k S: $\{[S_n]\}$ je Cauchyovská v $\epsilon X \Rightarrow \forall \frac{\epsilon}{3} > 0\ \exists n_0 : \forall m, n \geq n_0 : d''([S_m], [S_n]) < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow d'(S_m, S_n) < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow \lim_{j\to\infty} d(x_{m,j}, x_{n,j}) < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow$ $\exists \eta_0 : \forall j \geq \eta_0,\ m, n \geq n_0 : d(x_{m,j}, x_{n,j}) < \frac{\epsilon}{3} (**)$

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti spojíme $(*)$ a $(**)$ a dostaneme:
$\forall\epsilon > 0\ \exists\eta : \forall i, j \geq \eta \Rightarrow d(x_{i,n_i}, x_{j,n_j}) < \epsilon$, což znamená, že S je Cauchyovská posloupnost. Stačí ukázat, že $[S_1], [S_2], ..., [S_n]$ konverguje k $[S]$:
$d''([S_i], [S]) = d'(S_i, S) = \lim\limits_{j\to\infty} d(x_{i,j}, x_{j,n_j})$
a zároveň $d(x_{i,j}, x_{j,n_j}) \leq d(xi, j, x_{i,n_i}) + d(x_{i,n_i}, x_{j,n_j})$
Potom platí $\forall\epsilon = \frac{\epsilon}{6}\ \exists n_i : \forall k, l \geq n_i \Rightarrow d(x_{i,j}, x_{j,n_j}) < \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} d(x_{i,j}, x_{j,n_j}) < \epsilon$
Proto pro $\forall i \geq \eta$ platí $d''([S_i], [S]) \leq \epsilon \Leftrightarrow [S] = \lim_{i\to\infty}$ a tím jsme dokázali, že ϵX je metrický prostor. Pro $x \in X$ položíme $f(x) = [x]$, kde x označuje třídu v ϵX obsahující posloupnost $(x, x, x, ...)$. Pro libovolné $x, y \in X$ máme $d''(f(x), f(y)) = \lim\limits_{j\to\infty} d(x_j, y_j) = d(x, y)$ a platí $f(\bar{X}) = \epsilon X$.
Tím máme dokázáno, že $f : X \to \epsilon X$ je izometrie a důkaz je hotov.

Důsledek: Ke každému metrickému prostoru existuje jeho zúplnění.
Důsledek: Každá Cauchyovská posloupnost v metrickém prostoru je ohraničená.

4 Kompaktní prostory

Definice: Topologický prostor X je kompaktní pokud každé jeho otevřené pokrytí má konečné podpokrytí.

Věta: Topologický podprostor Y topologického prostoru X je kompaktní právě tehdy, když každé jeho pokrytí množinami otevřenými v X obsahuje konečné podpokrytí.

Důkaz:

- $\Rightarrow$ $Y \subset X$ je kompaktní
  Nechť $(U_i)_{i \in I}$ je pokrytí Y množinami otevřenými v X. Potom $(V_i)_{i \in I}$, $V_i = U_i \cap Y$ je otevřené pokrytí X a z kompaktnosti vím, že existuje konečná množina $J \subset I$ taková, že $\bigcup\limits_{i \in J} V_i = Y$. Evidentně $Y \subset \bigcup\limits_{i \in J} U_i$

- $\Leftarrow$ Předpokládáme, že každé pokrytí Y množinami otevřenými v X, obsahuje konečné podpokrytí.
  Nechť $\bigcup\limits_{i \in I} V_i$ je libovolné otevřené pokrytí Y. $\forall i \in I\ \exists U_i$ otevřené v X takové, že $V_i = U_i \cap Y$ (z indukované topologie).
  Evidentně $Y = \bigcup\limits_{i \in I} V_i = \bigcup\limits_{i \in I} (U_i \cap Y) \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Z předpokladu existuje konečná množina $J \subset I$ taková, že $\bigcup\limits_{i \in J} \supset Y$. Potom $\bigcup\limits_{i \in J} V_i = \bigcup\limits_{i \in J} (U_i \cap Y) = \bigcup\limits_{i \in J} U_i \cap Y = Y$, tedy Y je kompaktní.

Věta:

(a) Sjednocení dvou kompaktních množin je kompaktní množina.

(b) Pokud A je kompaktní a U otevřená, tak $A - U$ je kompaktní.

(c) Nechť $A \subset B$ a $\bar{B}$ je kompaktní. Potom i $\bar{\text{A}}$ je kompaktní.

(d) Průnik libovolného systému kompaktních uzavřených množin je kompaktní uzavřená množina.

Důkaz:

(a) Nechť $(U_i)_{i \in I}$ je otevřené pokrytí $A \cup B$. A a B jsou kompaktní $\Rightarrow$ $\exists J, K \subset I : A \subset \bigcup\limits_{i \in J} U_i, B \subset \bigcup\limits_{i \in K} U_i$. Potom $A \cup B \subset \bigcup\limits_{i \in J \cup K} U_i$.

(b) Nechť $A - U$ má otevřené pokrytí $\bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Potom $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \cup U$ je otevřené pokrytí A a protože A je kompaktní, existuje konečná množina $J \in I$: $\bigcup\limits_{i \in J} U_i \subset A - U$

(c) $A \subset B$ a $\bar{B}$ je kompaktní. $\bar{A} \subset \bar{B}$. Nechť $\bigcup_{i \in I} U_i$ je otevřené pokrytí množiny $\bar{A}$. Potom $\bigcup_{i \in I} U_i \cup X - \bar{A}$ tvoří otevřené pokrytí X a tedy i $\bar{B}$. Z kompaktnosti $\bar{B}$ víme, že existuje konečná indexová množina J, pomocí které pokryjeme $\bar{B}$. Potom $\bigcup_{i \in J} U_i$ pokrývá i $\bar{A}$ a proto je kompaktní.

(d) Nechť $(A_i)_{i \in I}$ je systém kompaktních uzavřených podmnožin X. $\bigcap_{i \in I} A_i$ je uzavřená množina. Nechť $\bigcup_{i \in J} U_i$ je otevřené pokrytí $A_k \supset \bigcap_{i \in I} A_i$ (platí pro všechna k). Potom množiny $(U_i)_{i \in J}$ a $X - \bigcap_{i \in I} A_i$ pokrývají celé X a tedy i $A_k \forall k$. A_k je kompaktní $\Rightarrow$ má konečné podpokrytí $\Rightarrow$ $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_k$ má konečné pokrytí a proto je kompaktní.

Příklad: Průnik dvou kompaktních množin nemusí být kompaktní množina
prostor $(\mathbb{N} \cup \{x_1, x_2\}, \mathcal{T})$
topologie: $\mathcal{T} = 2^X \cup \{\mathbb{N} \cup \{x_1\}, \mathbb{N} \cup \{x_2\}\}$
$\{\mathbb{N} \cup \{x_1\}$ a $\{\mathbb{N} \cup \{x_2\}$ jsou kompaktní množiny a jejich průnik je $\mathbb{N}$, což není kompaktní množina

Věta: Uzavřená podmnožina kompaktního topologického prostoru X je kompaktní.

Věta: Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení topologických prostorů a $A \subset X$. Pokud je A kompaktní, tak je $f(A) \subset Y$ také kompaktní.

Důkaz: Nechť $(V_i)_{i \in I}$ je otevřené pokrytí $f(A)$. Potom $(f^{-1}(V_i))_{i \in I}$ je otevřené pokrytí A. Z kompaktnosti A víme, že dokážeme najít konecné podpokrytí $(f^{-1}(V_i))_{i \in J}$, $(V_i)_{i \in J}$ pokrývá $f(A)$ a proto se jedná o kompaktní množinu.

Důsledek1: Faktorový prostor kompaktního prostoru je kompaktní.
Poznámka: Faktorový prostor je prostor reprezentantů tříd ekvivalence prostoru.
Důsledek2: Kompaktní topologický prostor není homeomorfní s nekompaktním topologickým prostorem.

Věta: Nechť M je kompaktní množina v topologickém prostoru X a $f : X \to Y$ spojité zobrazení. Zobrazení $f|_M$ nabývá na M své extrémy.

Věta: Nechť je množina A kompaktní. Potom kažná nekonečná podmnožina A má limitní bod. (Každé okolí X má s A neprázdný průnik.

Příklad: $X = \mathbb{Z}_+ \times Y$, přičemž na $\mathbb{Z}_+$ máme topologii konečných doplňků a na Y triviální topologii. Potom X není kompaktní, pokrytí $\{n\} \times Y$ nemá konečné podpokrytí, ale je limit point kompaktní

Definice: Mějme topologický prostor $(X, \mathcal{T})$. X se nazývá *limit point kompaktní* pokud kažná nekonečná podmnožina má limitní bod.
X se nazývá *sekvenciálně kompaktní* pokud každá posloupnost v X má konvergentní podposloupnost.

Věta: Nechť X je metrizovatelný prostor. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) X je kompaktní

(ii) X je limit point kompaktní

(iii) X je sekvenciálně kompaktní

(důkaz u limit point spojitosti)

5 Kompaktní Hausdorffovy prostory

Věta:

(a) Kompaktní množina v Hausdorffově prostoru je uzavřená.

(b) Průnik libovolného systému kompaktních množin v Hausdorffově topologickém prostoru je kompaktní množina.

Důkaz:

(a) X Hausdorffův, $A \subset X$.
Pokud $X - A = \emptyset$ potom $A = X$ a A je uzavřená. Nechť tedy $X - A \neq \emptyset$, $x \in X - A$ je libovolný bod. Potom $\forall y \in A$ existuje U_x okolí x a V_y okolí y takové, že $U_x \cap V_y = \emptyset$ (z Hausdorffovosti prostoru). Množiny V_y pokrývají A a z kompaktnosti A $J \subset I$ konečná taková, že $\{V_y^i\}_{i \in J}$ pokrývá A. Zároveň existuje $\{U_x^i\}_{i \in J}$ a $U = \bigcap_{i \in J} U_i$, okolí bodu x. $U \cap A = \emptyset$. Proto $U \subset X - A$ a z libovolnosti x platí, že $X - A$ je otevřená. Proto je A uzavřená.

(b) Dostaneme z (a) a části (d) věty v minulé kapitole

Důsledek: Kompaktní podmnožina metrizovatelného prostoru je uzavřená. (Každý metrizovatelný prostor je Hausdorffův.)

Věta: Spojitá bijekce kompaktního topologického prostoru na Hausdorffův prostor je homeomorfismus.

Věta (Hein-Borel): $A \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní právě tehdy, když A je uzavřená a ohraničená.

Důkaz:

$\Rightarrow$ A je kompaktní a $\mathbb{R}^n$ je Hausdorffův $\Rightarrow$ A je uzavřená
Z kompaktnosti A víme, že ji lze pokrýt konečným počtem koulí $\Rightarrow$ Existuje koule s maximálním poloměrem a ta množinu A ohraničuje.

$\Leftarrow$ A je uzavřená a ohraničená $\Rightarrow$ $A \subset$ uzavřený kvádr K, K je uzavřená a kompaktní množina $\Rightarrow$ A je kompaktní.

6 Souvislost a kompaktnost

Definice: Nechť $(X, \mathcal{T})$ topologický prostor. *Rozdělení* X je dvojice $U, V \in \mathcal{T}$, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cup V = X$. Prostor X se nazývý *souvislý*, pokud neexistuje rozdělení X.

Věta: X je souvislý právě tehdy, když jediné množiny, které jsou zároveň otevřené i uzavřené, jsou $\emptyset$ a X.

Lemma: $Y \subset X$ je podprostor. Rozdělení Y je $A \cup B$, kde žádné z A a B neobsahuje limitní bod z té druhé množiny.

Lemma: Pokud $X = C \cup D$ je rozdělení X a Y je souvislý podprostor X, tak $Y \subset C$ nebo $Y \subset D$.

Věta: Sjednocení souvislých podprostorů X, které mají aspoň 1 společný bod, je souvislá množina.

Věta: Nechť A je souvislý podprostor X. Pokud $A \subset B \subset \overline{A}$, potom je B také souvislá.

Věta: Nechť $f : X \to Y$ spojité zobrazení a X souvislá množina. Potom $f(X)$ je souvislá v Y.

Věta: Konečný kartézský součin souvislých prostorů je souvislá množina.

6.1 Zevšeobecnění věty o střední hodnotě

Definice: Jednoduše uspořádaná množina L, která má více než jeden prvek se nazývá *lineární kontinuum* pokud platí:

(i) Každá neprázdná podmnožina L, která je ohraničená, má supremum.

(ii) Pokud $x < y$, pak existuje z takové, že $x < z < y$.

Věta: Pokud je L lineární kontinuum, tak L je souvislá a souvislé jsou i intervaly (i nekonečné) v L.

Věta o střední hodnotě: Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení, X je souvislý a Y je uspořádaná množina. Pokud $a, b \in X$ a $f(a) < r < f(b)$, potom $\exists c \in X$ takové, že $f(c) = r$.

7 Path souvislost a lokální souvislost

Definice: Nechť $x, y \in X$, *cesta z x do y* je spojité zobrazení $f : [a, b] \to X$ takové, že $f(a) = x$ a $f(b) = y$. X se nazývá *path souvislá*, pokud každá dvojice bodů z X může být spojená cestou.

Definice: $X, x \sim y$ pokud existuje souvislý podprostor X, který obsahuje x i y. Třídy ekvivalence se nazývají *komponenty X.*

Věta: Komponenty X jsou souvislé podprostory X, které jsou disjunktní, jejich sjednocení je celé X a každý neprázdný souvislý podprostor X má neprázdný průnik nejvíce s jednou komponentou.

Definice: Definujeme relaci ekvivalence na X jako $x \sim y$ pokud existuje cesta z x do y v X. Třídy ekvivalence v této relaci tvoří *path komponenty.*

Věta: Path komponenty X jsou path souvislé podprostory X, které jsou disjunktní, jejich sjednocení je celé X a každý neprázdný path souvislý podprostor X má neprázdný průnik nejvíce s jednou komponentou.

Příklad:
$S = \{[x, sin(\frac{1}{x})], 0 < x \leq 1\}$ - topologická sinusoida
$\overline{S} = S \cup [-1, 1]$ - její uzávěr (spolu s intervalem na přímce)
S je path csouvislý, ale $\overline{\text{S}}$ není.
S i $\overline{\text{S}}$ jsou souvislé.

Definice: X se nazývá *lokálně souvislý v x* pokud pro každé $\mathcal{U}$ okolí bodu x existuje $\mathcal{V}$ souvislé okolí bodu x, které je obsaženo v $\mathcal{U}$. Pokud je X lokálně souvislý v každém bodě, pak říkámě, že *X je lokálně souvislý.*
Analogicky X se nazývá *lokálně path souvislý v x* pokud pro každé $\mathcal{U}$ okolí bodu x existuje $\mathcal{V}$ path souvislé okolí bodu x, které je obsaženo v $\mathcal{U}$. Pokud je X lokálně path souvislý v každém bodě, pak říkámě, že *X je lokálně path souvislý.*

Věta: X je lokálně souvislý právě tehdy, když pro každou otevřenou podmnožinu X platí, že každý její souvislý komponent je otevřený v X.

Věta: X je lokálně path souvislý právě tehdy, když pro každou otevřenou podmnožinu X platí, že každý její path souvislý komponent je otevřený v X.

Věta: X topologický prostor. Každý path souvislý komponent X leží v nějakém souvislém komponentu X. Pokud je X lokálně path souvislý, potom jsou souvislé a path souvislé komponenty totožné.

Věta: Součin konečně mnoha kompaktních prostorů je kompaktní.

Definice: Množina ε podmnožin množiny X má vlastnost *konečného průniku*, pokud pro každou konečnou podmnožinu $\mathcal{C} = C_1, C_2, ..., C_n$ platí, že
$C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n \neq \emptyset$

Věta: Něchť X je topologický prostor. X je kompaktní právě tehdy, když pro každou množinu uzavřených podmnožin $\mathcal{C}$, která má vlastnost konečného průniku platí, že $\bigcap\limits_{C_i \in \mathcal{C}} C_i \neq \emptyset$

Důkaz: Uvažujeme k množinám z $\mathcal{C}$ jejich doplňky $X - C_i$, které jsou uzavřené. Z De Morganových pravidel $X - (\bigcup\limits_{\alpha \in J} C_\alpha) = \bigcap_{j \in J}(X - C_\alpha)$ plyne:
$\mathcal{C}$ pokrývá $X \Leftrightarrow \bigcap\limits_{C_i \in \mathcal{C}} X - C_i = \emptyset$

Konečná množina C_i pokrývá $X \Leftrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{k} X - C_i = \emptyset$
X je kompaktní $\Leftrightarrow$ Pro každou množinu otevřených podmnožin $A_i = X - C_i$ platí, že pokud $\mathcal{A}$ pokrývá X, potom nějaká konečná podmnožina $\mathcal{A}$ pokrývá X.
$\Leftrightarrow$ Pokud máme množinu otevřených podmnožin $\mathcal{A}$, pro které platí, že žádná konečná podmnožina této množiny nepokrývá X, potom ani $\mathcal{A}$ nepokrývá X.
(dodělat něco třeba)

Věta - Lebesguovo číslo: Nechť $\mathcal{A}$ je otevřené pokrytí metrického prostoru (X, d). Pokud X je kompaktní, tak $\exists \delta > 0$ takové, že pro každou podmnožinu X, pro kterou $sup\{d(a_1, a_2), a_1, a_2 \in A\} < \delta$ existuje prvek z $\mathcal{A}$, který ji obsahuje.

Věta - o rovnoměrné spojitosti: Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení kompaktního metrického prostoru (X, d_1) do metrického prostoru (Y, d_2). Potom f je rovnoměrně spojité.

8 Limit point kompaktnost

Definice: Prostor X se nazývá *limit point kompaktní*, pokud má každá nekonečná podmnožina X limitní bod.

Věta: Kompaktnost implikuje limit point kompaktnost.

Definice: $(X, \mathcal{T})$. $\{x_n\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů X. X se nazývá *sekvenciálně kompaktní* pokud každá posloupnost v X má konvergentní podposloupnost.

Věta: Nechť X je metrizovatelný prostor. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) X je kompaktní

(ii) X je limit point kompaktní

(iii) X je sekvenciálně kompaktní

Důkaz:

(i) $\Rightarrow$ (ii) X je kompaktní, $A \subset X$ je nekonečná podmnožina X. Chceme ukázet, že má limitní bod. Sporem: Předpokládejme, že A nemá limitní bod. Potom obsahuje všechny své limitní body $\Rightarrow \bar{A} = A$ (je uzavřená). Dále $\forall a \in A$ vybereme takové okolí U_a, že $U_a \cap A = \{a\}$. Potom X pokryjeme otevřenými množinami U_a a $X - A$. Z kompaktnosti A víme, že z množin U_a umíme vybrat konečné podpokrytí. $X - A \cap A = \emptyset$ a U_a vždy obsahuje pouze jeden prvek z A $\Rightarrow$ A by musela být konečná - spor s předpoklady.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) X je limit point kompaktní. Uvažujme $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.
Pokud je A konečná množina, $\exists x : x = x_n$ pro nekonečně mnoho n. $\Rightarrow \{x_n\}$ má triviálně konvergentní podposloupnost.
Pokud je A nekonečná množina, A má limitní bod x. Pro posloupnost $\{x_n\}$ definujeme podposloupnost $x_1 \in B(x, 1), x_{n_i} \in B(x, \frac{1}{i})$, která konverguje k x.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Nejdříve ukážeme, že pokud je X sekvenciálně kompaktní, tak platí lemma o Lebesguově čísle, t.j. pokud máme otevřené pokrytí X, tak $\exists\delta > 0$ takové, že pro každou podmnožinu A s diametrem$< \delta$ existuje prvek z pokrytí, ve kterém je A obsažena. Sporem: Předpokládejme, že $\nexists\delta \Rightarrow \forall n \exists Cn$ množina s diametrem $< \frac{1}{n}$, která není obsažena v žádné množině z pokrytí. $\forall n$ vybereme $x_n \in C_n$. $\{x_n\}$ tvoří posloupnost a z předpokladu plyne, že obsahuje konvergentní podposloupnost, které konverguje k $a \in A$ (množina z pokrytí). A je otevřená $\Rightarrow \exists\delta > 0 : B(a, \epsilon) \subset A$. Pokud je i dostatečně velké, platí $\frac{1}{n_i} < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow C_{n_i}$ leží v $\frac{\epsilon}{2}$ okolí bodu x_{n_i}. Zároveň pokud je i dostatečně velké, platí $d(x_{n_i}, a) < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow C_{n_i}$ leží v ϵ okolí bodu a. Proto $C_{n_i} \subset A$, což je spor.
Dále ukážeme, že pokud je X sekvenciálně kompaktní, tak $\forall\epsilon > 0$ existuje konečné pokrytí X otevřenými ϵ-koulemi. Sporem: Předpokládjme, že

$\exists \epsilon > 0$ takové, že X neumíme pokrýt konečným počtem ϵ-koulí. Zkonstruujeme posloupnost $\{x_n\} : x_1$ je libovolný bod z X, $B(x_1, \epsilon) \neq X$ a $x_{n+1} \notin B(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \epsilon)$, z čehož vyplývá $d(x_{n+1}, x_i) \geq \epsilon \ \forall i = 1, \ldots n$. Proto $\{x_n\}$ nemůže mít konvergentní podposloupnost, což je spor.
Zbývá dokázat, že X je kompaktní. Nechť $\mathcal{A}$ je otevřené pokrytí X. Z prvního kroku víme, že má Lebesguovo číslo δ. Nechť $\epsilon = \frac{\delta}{3}$, z druhého kroku víme, že existuje konečné pokrytí X otevřenými ϵ-koulemi, kde každá z nich má průměr maximálně $\frac{2\delta}{3}$, a proto leží v nějakém prvku z $\mathcal{A}$ (důsledek Lebesguova lemma). Pokud pro každou kouli zvolíme jeden prvek z pokrytí, dostaneme konečné pokrytí X.

9 Lokální kompaktnost

Definice: X se nazývá *lokálně kompaktní*, pokud pro každé $x \in X$ existuje C kompaktní okolí.

Věta: X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor právě tehdy, když existuje prostor Y, pro která platí:

(i) X je podprostor Y

(ii) $Y \backslash X$ obsahuje jediný bod

(iii) Y je kompaktní Hausdorffův prostor.

Pokud existují Y a Y' dva prostory splňující dané podmínky, pak existuje $f : Y \to Y'$ homeomorfismus takový, že $f|_X = id$

Důkaz:

1.krok (nejdříve konec) Nechť Y a Y' jsou dva prostory takové, že $h : Y \to Y', p \mapsto q, h|_X = id$. U otevřená v $Y \Leftrightarrow h(U)$ je otevřená v Y'.
$p \notin U \Rightarrow h(U) = U$, U je otevřená v Y a $X \subset Y$, proto je otevřená i v X, a protože X je otevřená v Y, je i U otevřená v Y.
$p \in U$, $C = Y - U$ je uzavřená v $Y \Rightarrow C$ je kompaktní. $C \subset X \subset Y' \Rightarrow C$ je kompaktní podprostor Y', Y' je Hausdorffův, C je uzavřený v $Y' \Rightarrow Y' - C = h(U)$ je otevřený v Y'.

2.krok X je lokálně kompaktní Hausdorffův, vezmeme $a \notin X$. $Y = X \cup a$ a zavedeme topologii: otevřené množiny jsou otevřené množiny v X a $\forall Y - C$, kde C je kompaktní podprostor X. (je třeba dokázat, že se jedná o topologii). Teď ukážeme, že X je podprostor Y. U otevřená v Y, $U \cap X = U$. $U = Y - C \Rightarrow (Y - C) \cap X = X - C$ otevřená v X
(...?)
Y je kompaktní: Nechť $\mathcal{A}$ je otevřené pokrytí Y. $\mathcal{A}$ musí obsahovat i množinu tvaru $Y - C$, protože žádné z množin 1. typu neobsahují bod a. Vezmeme množiny z $\mathcal{A}$ kromě těch ve tvaru $Y - C$, to je pokrytí X a z něj existuje konečné podpokrytí, protože X je kompaktní. Plus vezmeme jednu množinu $Y - C$ a stále máme konečné pokrytí.
Y je Hausdorffův: Pokud $x, y \in X$, není co dokazovat (X je Hausdorffův), zajímá nás tedy případ $x \in X, y = a \notin X$. X je lokálně kompaktní $\Rightarrow \exists C$ kompaktní okolí x obsahující U. Potom $Y - C$ je okolí a a $U \cap Y - C = \emptyset$

3.krok (opačná implikace) Nechť existuje Y splňující podmínky věty. Potom X je Hausdorffův. Chceme ukázat, že $\forall x \in X$ je X lokálně kompaktní. $a \in Y - X$ jediný bod, $x \in U, a \in V$ okolí. Z Hausdorffovosti víme, že $U \cap V = \emptyset$. $C = Y - V$ je uzavřená v $Y \Rightarrow C$ je kompaktní podprostor Y a obsahuje U.

Mohou nastat dvě situace - X je kompaktní $\Rightarrow$ Y dostaneme přidáním 1 izolovaného bodu, nebo X není kompaktní $\Rightarrow \bar{X} = Y$

Definice: Pokud je Y kompaktní Hausdorffův prostor a $X \subset Y$ takový, že $\overline{X} = Y$, potom Y se nazývá *kompaktifikace* X. Pokud $Y \backslash X = \{a\}$, potom Y se nazývá jednobodová kompaktifikace X.

Věta: Nechť X je Hausdorffův prostor. Potom X je lokálně kompaktní právě tehdy, když $\forall x \in X$ a $\forall U_x$ okolí bodu x existuje V_x okolí bodu x takové, že $\overline{U}_x$ je kompaktní a $\overline{V} \subset U$.

Důsledek: Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor a $A \subset X$ podprostor. Pokud je A uzavřený nebo otevřený v X, tak je A lokálně kompaktní.

Důsledek: X je homeomorfní k otevřenému podprostoru kompaktního Hausdorffova prostoru právě tehdy, když je X lokálně kompaktní Hausdorffův.

10 Normální prostory

Definice: Předpokládejme, že jednoprvkové množiny jsou v X uzavřené. Potom X je *regulární* pokud pro $x \in X$ a B uzavřenou množinu, $x \notin B$, existují otevřené disjunktní množiny $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ takové, že $x \in \mathcal{U}$ a $B \in \mathcal{V}$.
X je *normální* pokud pro $A, B : A \cap B \neq \emptyset$ uzavřené množiny, existují otevřené disjunktní množiny $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ takové, že $A \in \mathcal{U}$ a $B \in \mathcal{V}$.

Lemma: Nechť X je topologický prostor. Jednoprvkové množiny jsou uzavřené.

(i) X je regulární $\Leftrightarrow \forall x \in X$ a $\forall \mathcal{U}$ okolí bodu x $\exists \mathcal{V}$ okolí bodu x takové, že $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$

(ii) X je normální $\Leftrightarrow \forall \mathcal{A}$ uzavřenou a $\mathcal{U}$ otevřenou množinu, $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ existuje $\mathcal{V}$ otevřená taková, že $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ a $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$

Věta:

(i) Podprostor Hausdorffova prostoru je Hausdorffův, součin Hausdorffových prostorů je Hausdorffův.

(ii) Podprostor regulárního prostoru je regulární, součin regulárních prostorů je regulární.

Věta: Nechť X_α je množina prostorů, $A_\alpha \subset X_\alpha$ $\forall \alpha$. Pokud na $\prod X_\alpha$ máme součinovou (nebo box) topologii, tak $\prod \overline{A}_\alpha = \overline{\prod A_\alpha}$.

Příklad Hausdorffova, ale ne regulárního prostoru:
$\mathbb{R}$ s topologií, jejíž báze jsou otevřené intervaly (a, b) a všechny množiny tvaru $(a, b) - K$, kde $K = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$
Jde o Hausdorffův prostor, protože pro libovolné dva body najdu disjunktní intervaly, které jej oddělují.
Nejedná se o regulární prostor, protože nenajdu takové disjunktní množiny, které by mi oddělovaly 0 a K.

Věta: Každý regulární prostor se spočítatelnou bází je normální.

Důkaz: A, B uzavřené v X, $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. $\forall x \in A \exists U$ okolí takové, že $U \cap B = \emptyset$. Z regularity X víme, že $\exists V$ okolí x : $\bar{V} \subset U$. K $\bar{V}$ vezmeme bázový prvek, který spadá pod U. Pokud toto uděláme $\forall x \in A$, získáme spočitatelné pokrytí A otevřenými množinami, jejichž uzávěry mají s B prázdný průnik $\to (U_n)$. Analogicky získáme i (V_n) pokrývající $B : \bar{V}_n \cap A = \emptyset \forall n$. Množiny $\cup U_n$ a $\cup V$ jsou otevřené a pokývají A a B, ale nemusí být nutně disjunktní:

$$U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i \qquad V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i$$

V'_n, U'_n jsou otevřené (rozdíl otevřené a uzavřené množiny) a pokrývají A a B resp. $U' = \bigcup U_n$ a $V' = \bigcup V_n$ jsou hledané disjunktní množiny.

Věta: Každý metrizovatelný prostor je normální.

Věta: Každý kompaktní Hausdorffův prostor je normální.

Urysohnovo lemma: Nechť X je normální prostor, A a B jsou uzavřené a $A \cap B = \emptyset$. Nechť $[a, b]$ je uzavřený interval v $\mathbb{R}$. Potom existuje spojité zobrazení $f : X \to [a, b]$ takové, že $f(x) = a \ \forall a \in A$ a $f(x) = b \ \forall b \in B$.

Definice: Pokud A a B jsou dvě podmnožiny topologického prostoru X a pokud existuje spojitá funkce $f : X \to [a, b]$ taková, že $f(A) = \{0\}$ a $f(B) = \{1\}$, říkáme, že A a B můžeme rozdělit spojitou funkcí.

11 Lokální konečnost a parakompaktnost

Definice: $\mathcal{A}$ množina podmnožin X se nazývá *lokálně konečná*, pokud $\forall x \in X$ má okolí, které protíná konečně mnoho množin z $\mathcal{A}$.

Lemma: Nechť $\mathcal{A}$ je lokálně konečná množina podmnožin X, potom

(i) Každá podmnožina $\mathcal{A}$ je lokálně konečná

(ii) $\mathcal{B} = \{\overline{A}\}_{A \in \mathcal{A}}$ množina uzávěrů prvků z $\mathcal{A}$ je lokálně konečná

(iii) $\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$

Definice: Množina podmnožin $\mathcal{B}$ prostoru X se nazývá *spočitatelně lokálně konečná*, pokud $\mathcal{B}$ můžeme napsat jako spočitatelné sjednocení B_n, kde každá B_n je lokálně konečná.

Definice: Nechť $\mathcal{A}$ je množina podmnožin prostoru X. Množina podmnožin $\mathcal{B}$ se nazývá *zjemnění* $\mathcal{A}$, pokud $\forall B \in \mathcal{B}\ \exists A \in \mathcal{A}$ takové, že $B \subset A$.

Lemma: Nechť X je metrizovatelný prostor. Pokud $\mathcal{A}$ je otevřené pokrytí X, potom existuje otevřené pokrytí $\mathcal{B}$ zjemňující $\mathcal{A}$, které je spočitatelně lokálně konečné.

Definice: Prostor X se nazývá *parakompaktní*, pokud každé otevřené pokrytí X má lokálně konečné otevřené zjemnění, které pokrývá X.

Věta: Každý uzavřený podprostor parakompaktního prostoru je parakompaktní.

Lemma: Nechť X je regulární. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:
Každé otevřené pokrytí X má zjemnění, které je:

(i) spočitatelné lokálně konečné otevřené pokrytí X

(ii) pokrytí X, které je lokálně konečné

(iii) uzavřené pokrytí X a lokálně konečné

(iv) otevřené pokrytí X a lokálně konečné

Věta: Každý metrizovatelný prostor je parakompaktní.

Tichonovova věta: Součin kompaktních prostorů je kompaktní prostor.

Lemma: Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ množina jejich podmnožin, která má vlastnost konečného průniku. Potom existuje $\mathcal{D}$ množina podmnožin X taková, že $\mathcal{D}$ obsahuje $\mathcal{A}$ a má vlastnost konečného průniku a žádná podmnožina X obsahující $\mathcal{D}$ tuto vlastnost nemá (maximální množina s vlastností konečného průniku).

Lemma: Mějme X množinu a $\mathcal{D}$ množinu jejich podmnožin, která je maximální vzhledem k vlastnosti konečného průniku. Potom:

(i) Každý konečný průnik prvků z $\mathcal{D}$ je prvek z $\mathcal{D}$

(ii) Pokud $A \subset X$ taková, že má neprázdný průnik s každým prvkem z $\mathcal{D}$, potom $A \in \mathcal{D}$

12 Metrizační věty

Urysohnova metrizační věta: Každý regulární prostor X se spočítatelnou bází je metrizovatelný.

Nagata-Smirnov metrizační věta: Prostor X je metrizovatelný právě tehdy, když X je regulární a má spočitatelně lokálně konečnou bázi.

Smirnova metrizační věta: X je metrizovatelný právě tehdy, když je parakompaktní Hausdorffův lokálně metrizovatelný.

Důkaz:
Nechť X je metrizovatelný. Potom je lokálně metrizovatelný a parakompaktní. Nechť X je lokálně metrizovatelný a parakompaktní. Ukážeme, že X má bázi, která je spočitatelně lokálně konečná. Potom tvrzení plyne z Nagata-Smirnovy věty, neboť X je regulární (z parakompaktnosti a Hausdorffovosti). Pokryjeme X otevřenými množinami, které jsou metrizovatelné $\Rightarrow$ vybereme lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{C}$ tohoto pokrytí. Nechť $d_C : C \times C \to \mathbb{R}$ je metrika $\forall C \in \mathcal{C}$. Nechť $B_C(x, \epsilon)$ je koule otevřená v $C \forall x \in C \Rightarrow$ otevřená v X. Nechť $m \in \mathbb{N} : A_m = \{B_C(x, \frac{1}{m}), x \in C, C \in \mathcal{C}\}$, $\mathcal{D}_m$ je lokálně konečné zjemnění $\mathcal{A}_m$ (z parakompaktnosti). $\mathcal{D} = \bigcup D_m$ je spočitatelně lokálně konečné. Ukážeme, že $\mathcal{D}$ je hledaná báze:
$x \in X$, U je okolí x. chceme najít okolí $D \in \mathcal{D} : x \in D \subset U$. x leží v konečně mnoha prvcích $\mathcal{C}$, nechť to jsou $C_1 \cdots C_k$. $U \cap C_i$ je okolí x v $C_i \Rightarrow \exists \epsilon_i : B_{C_i}(x, \epsilon_i) \subset U \cap C_i$. Nechť $\frac{2}{m} < min\{\epsilon_1 \cdots \epsilon_k\}$.
$\mathcal{D}$ pokrývá $X \Rightarrow \exists D \in \mathcal{D} : x \in D \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ zjemňuje $\mathcal{A} \Rightarrow \exists B_C(y, \frac{1}{m}) \in \mathcal{A}$ pro $C \in \mathcal{C}, y \in C \Rightarrow x \in D \subset B_C(y, \frac{1}{m}) \to x \in C \Rightarrow C$ je jedna z množin $C_i \Rightarrow B_C(y, \frac{1}{m})$ má diametr $\leq \frac{2}{m} < \epsilon$

$$\Rightarrow x \in D \subset B_{C_i}(y, \frac{1}{m}) \subset B_{C_i}(x, \epsilon_i) \subset U$$